ŒUVRES SCIENTIFIQUES

DE

L. LORENZ

REVUES ET ANNOTÉES

PAR

H. VALENTINER

PUBLIÉES AUX FRAIS DE LA FONDATION CARLSBERG

TOME PREMIER

COPENHAGUE

LIBRAIRIE LEHMANN & STAGE

BIANCO LUNO (F. DREYER), IMPRIMEUR DE LA COUR

1898

TABLE DES MATIÈRES DU PREMIER TOME.

DÉTERMINATION

DE

LA DIRECTION DES VIBRATIONS DE L'ÉTHER LUMINEUX PAR LA POLARISATION DE LA LUMIÈRE DIFFRACTÉE.

DÉTERMINATION DE LA DIRECTION DES VIBRATIONS DE L'ÉTHER LUMINEUX PAR LA POLARISATION DE LA LUMIÈRE DIFFRACTÉE.

SKAND. NATURF. FÖRHANDL. VIII. P. 478–487.
POGG. ANN. CXI. 1860. P. 315–328.* * NOTE 1.

La question de savoir si les vibrations de la lumière sont perpendiculaires au plan de polarisation ou si elles se trouvent dans ce plan n'est pas, comme on sait, malgré sa grande importance théorique, encore complètement tranchée. Si l'on compare les différents arguments qui plaident en faveur de l'une ou de l'autre supposition, il n'y en a que deux auxquelles on peut assigner une importance essentielle pour la décision de la question, savoir: les expériences de Jamin sur la réflexion de la lumière par les substances transparentes, et la polarisation de la lumière diffractée.

Les expériences citées en premier lieu n'ont été jusqu'ici expliquées que par la supposition que les vibrations sont perpendiculaires au plan de polarisation. Mais la preuve n'est pas décisive, parce que jusqu'à présent l'hypothèse du changement brusque de l'indice de réfraction à la surface de séparation des deux substances a servi de base à tous les calculs, tandis qu'on peut expliquer complètement les expériences de Jamin (comme

je le démontrerai dans un mémoire sur la réflexion de la lumière) par les formules de Fresnel relatives à la réflexion et à la réfraction, en supposant que ces formules sont admissibles pour une variation infiniment petite de l'indice de réfraction et pourvu qu'il existe une couche continue établissant la transition entre les deux milieux. On peut maintenant se poser la question de savoir s'il est permis en toute rigueur d'admettre les formules de Fresnel dans le cas d'une variation infiniment petite de l'indice de réfraction, et si les formules peuvent être dérivées de l'une ou de l'autre des deux hypothèses sur la direction des vibrations. Ces deux questions seront traitées dans un troisième mémoire.

La rotation du plan de polarisation de la lumière diffractée nous conduit par une autre voie à la détermination de la direction des vibrations. Il y a déjà
* NOTE 2. plusieurs années que Stokes* a prouvé mathématiquement que le plan de polarisation de la lumière polarisée est dévié par la diffraction. On a cependant, et non sans raison, élevé des doutes sur l'exactitude de ses résultats, parce qu'il n'a qu'incomplètement résolu le problème de la réfraction; c'est pourquoi j'ai cherché à obtenir la solution complète du problème à l'aide de méthodes différentes, dont j'ai trouvé l'application la plus étendue dans la théorie de l'élasticité.

Si un mouvement ondulatoire traverse une ouverture pratiquée dans un plan solide, des ondes partiront de l'ouver-
* NOTE 3. ture pour se propager des deux côtés du plan.* On ne connaît pas le mouvement dans le plan, mais le mouvement dans l'ouverture est déterminé par la condition que la somme des composantes de l'onde incidente et de l'onde réfléchie soit égale à la composante de l'onde transmise,

et que les pressions normales et tangentielles des deux côtés du plan de l'ouverture soient égales entre elles en chaque point. Nous désignerons les composantes de l'onde incidente par u, v, w, celles de l'onde transmise par u_1, v_1, w_1, et celles de l'onde réfléchie par u_2, v_2, w_2. Nous supposerons de plus que le plan des coordonnées (yz) coïncide avec l'ouverture.

De la première condition il résulte qu'on aura pour $x = 0$

$$u + u_2 - u_1 = 0, \quad v + v_2 - v_1 = 0, \quad w + w_2 - w_1 = 0, \quad (1)$$

et au moyen de ces équations on trouve facilement, en vertu de la seconde condition, pour $x = 0$,

$$\frac{\partial(u + u_2 - u_1)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial(v + v_2 - v_1)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial(w + w_2 - w_1)}{\partial x} = 0. \quad (2)$$

Si les ondes incidentes sont des ondes lumineuses, on aura

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

et on satisfera aux équations (1) et (2) par la supposition

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial w_2}{\partial z} = 0, \quad (3)^*$$ * NOTE 4.

par où l'on voit qu'il ne se formera pas d'ondes de condensation.

La loi du mouvement est exprimée par l'équation différentielle

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

à laquelle toutes les composantes doivent satisfaire, ω désignant la vitesse de propagation et t le temps. On

satisfait à cette équation, comme on le voit facilement, par l'expression

$$\frac{\varphi(\omega t - r)}{r}$$

où

$$r = \sqrt{x^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2},$$

et par conséquent aussi par l'expression

$$\Phi = -\frac{1}{2\pi}\int d\beta \int d\gamma \frac{\varphi(\omega t - r, \beta, \gamma)}{r}.$$

Si les limites des intégrales correspondent aux limites de l'ouverture, la fonction Φ aura encore la propriété que sa dérivée partielle par rapport à x sera égale à $\varphi(\omega t, y, z)$ si x passe d'une valeur positive à zéro et si le point (y, z) se trouve à l'intérieur de l'ouverture. Si x passe d'une valeur négative à zéro, la dérivée sera égale à $-\varphi(\omega t, y, z)$, et si le point (y, z) se trouve en dehors de l'ouverture, la dérivée sera égale à zéro pour $x = 0$. En effet, si l'on différentie l'intégrale par rapport à x, x entrera comme facteur dans le résultat, et en conséquence, pour $x = 0$, tous les éléments de l'intégrale s'évanouiront, excepté ceux pour lesquels r est en même temps égal à zéro, c'est-à-dire y égal à β et z égal à γ. En conséquence on aura, si x est positif et si le point se trouve entre les limites de l'intégrale,

$$\left[\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right]^{x=0} = \left[\frac{1}{2\pi}\int d\beta \int \frac{d\gamma \cdot x}{r^3}\right]^{x=0} \varphi(\omega t, y, z) = \varphi(\omega t, y, z),$$

et si x est négatif,

$$\left[\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right]^{x=0} = -\varphi(\omega t, y, z).$$

Introduisons des fonctions analogues

$$\Psi, \quad X, \quad \Phi_1, \quad \Psi_1, \quad X_1,$$

formées au moyen de ψ, χ, φ_1, ψ_1, χ_1 de la même manière que Φ l'est au moyen de φ, et posons

$$u_1 = \Phi + \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} - \frac{\partial (F + F_1)}{\partial x},$$

$$v_1 = \Psi + \frac{\partial \Psi_1}{\partial x} - \frac{\partial (F + F_1)}{\partial y},$$

$$w_1 = X + \frac{\partial X_1}{\partial x} - \frac{\partial (F + F_1)}{\partial z},$$

en choisissant les fonctions F et F_1 de façon que

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z}$$

soit égal à zéro, et que

$$\Delta^2 F = \frac{\partial}{\partial x}\left[\Phi + \frac{\partial \Psi_1}{\partial y} + \frac{\partial X_1}{\partial z}\right] - \frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2},$$

$$\Delta^2 F_1 = \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} + \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2 F_1}{\partial t^2}.$$

Nous attribuons les mêmes valeurs aux composantes u_2, v_2, w_2 de l'onde réfléchie; on doit toutefois remarquer que x est toujours positif pour les premières et toujours négatif pour les dernières.

Supposons, ce que nous démontrerons plus tard, qu'on ait

$$[F]^{x=0} = 0 \quad \text{et} \quad \left[\frac{\partial F_1}{\partial x}\right]^{x=0} = 0, \tag{7}$$ * NOTE 5.

et nous aurons, en vertu de (1), pour $x = 0$,

$$\left.\begin{aligned} u + u_2 - u_1 &= u - 2\varphi_1(\omega t, y, z) = 0 \\ v + v_2 - v_1 &= v - 2\psi_1(\omega t, y, z) = 0 \\ w + w_2 - w_1 &= w - 2\chi_1(\omega t, y, z) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

et en vertu de (2), pour $x = 0$,

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial(u+u_2-u_1)}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial x}-2\varphi(\omega t, y, z) = 0\\ \frac{\partial(v+v_2-v_1)}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial x}-2\psi(\omega t, y, z) = 0\\ \frac{\partial(w+w_2-w_1)}{\partial x} &= \frac{\partial w}{\partial x}-2\chi(\omega t, y, z) = 0.\end{aligned}\right\} \quad (9)$$

On a donc satisfait à toutes les conditions et déterminé les fonctions φ, φ_1, ψ, ... On démontrera à présent sans difficulté l'exactitude des équations (7).* (* NOTE 6.)

Le problème de la diffraction est donc résolu complètement par les équations (5), (6), (8) et (9).

Passons maintenant au cas spécial où l'onde lumineuse incidente est plane; alors les composantes sont exprimées par les équations suivantes

$$u = \xi C, \quad v = \eta C, \quad \omega = \zeta C,$$

dans lesquelles

$$C = \cos k(\omega t - ax - by - cz),$$

* NOTE 7.
$$a\xi + b\eta + c\zeta = 0, \quad a^2+b^2+c^2 = 1.*$$

Nous ne chercherons à déterminer le mouvement que dans le cas d'un point situé à grande distance derrière l'ouverture de l'écran. Nous supposons donc que r soit très grand, et en désignant par ρ la distance du point à l'origine des coordonnées, nous écrivons

$$r = \sqrt{x^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2} = \rho - m\beta - n\gamma,$$

où

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \quad m = \frac{y}{\rho}, \quad n = \frac{z}{\rho}.$$

Nous avons de plus

$$l^2+m^2+n^2 = 1,$$

l, m, n étant les cosinus des angles que le rayon diffracté fait avec les axes de coordonnées. On trouve maintenant à cause de (9)

$$\varphi(\omega t, y, z) = \tfrac{1}{2} a k \xi \sin k(\omega t - by - cz)\,,$$

d'où il suit que

$$\Phi = \tfrac{1}{2} a k \xi S\,,$$

où

$$S = \frac{1}{2\pi\rho}\int d\beta \int d\gamma \sin\left[\omega t - \rho + (m - b)\beta + (n - c)\gamma\right].$$

En cherchant de cette manière les valeurs des différentes fonctions qui entrent dans (5), on aura

$$\begin{aligned} u_1 &= \tfrac{1}{2} k(a + l)[\xi - l(l\xi + m\eta + n\zeta)]S\,, \\ v_1 &= \tfrac{1}{2} k(a + l)[\eta - m(l\xi + m\eta + n\zeta)]S\,, \\ w_1 &= \tfrac{1}{2} k(a + l)[\zeta - n(l\xi + m\eta + n\zeta)]S\,. \end{aligned}$$

Ces expressions sont encore admissibles pour l'onde réfléchie, mais alors l est négatif. On aura par exemple, pour un point situé dans la direction opposée à celle du rayon incident, $a + l = 0$, et par conséquent toutes les composantes du mouvement sont ici égales à zéro. Stokes a obtenu le même résultat, bien qu'il ne tienne pas compte de l'onde incidente et qu'il n'ait pas complètement résolu le problème. Si l'on fait passer un plan par le rayon incident et le rayon diffracté, et si l'on désigne par a l'angle que fait la direction des vibrations du rayon incident avec la normale à ce plan, par a_1 l'angle que fait la direction des vibrations du rayon diffracté avec la même normale, on trouvera facilement l'équation de Stokes

$$\operatorname{tg} a_1 = \cos\beta \cdot \operatorname{tg} a\,,^*$$ * NOTE 8.

qui ne dépend ni de la forme ni de la position de l'ouver-

ture. Après diffraction par une fente verticale ou par un réseau, les vibrations seront donc plus verticales. Maintenant, selon que les expériences montrent que le plan de polarisation devient plus vertical ou plus horizontal, les vibrations seront parallèles ou perpendiculaires au plan de polarisation. Toutefois on ne doit pas perdre de vue le fait, supposé dans toute cette analyse, que l'écran est un plan qui ne participe pas aux vibrations et qui ne réfléchit pas de lumière par ses bords.

Les expériences qui ont été faites jusqu'ici ne tranchent pas la question ; car, tandis que Stokes a trouvé au moyen de réseaux verticaux tracés sur verre que le plan de polarisation devenait plus horizontal, Holzmann a obtenu des résultats contraires au moyen de réseaux au noir de fumée. Pour parvenir à un résultat définitif, j'ai donc fait une série d'expériences avec différents réseaux.

Je fais tomber dans la chambre à travers une lentille convergente la lumière du soleil fixée par un héliostat. A quelque distance du foyer, une lentille plus petite intercepte les rayons et les envoie à peu près parallèles sur un prisme de Nicol fixé dans un tube muni d'un cercle divisé. Une aiguille pourvue d'un vernier indique sur le cercle l'angle que fait avec la verticale le plan de polarisation du rayon transmis. A une distance de 7 mètres à peu près, la lumière tombe sur un réseau vertical, qui est fixé à une petite plate-forme au centre d'un cercle divisé horizontal. Devant l'objectif on a placé un prisme biréfringent de quartz, qui divise le rayon polarisé en deux rayons polarisés à angle droit. On peut faire tourner ce prisme autour de l'axe de la lunette. On verra donc dans la lunette deux franges horizon-

tales de lumière diffractée, qui auront en général une clarté différente; mais si l'on fait tourner ou le Nicol ou le prisme biréfringent, les intensités des deux images peuvent devenir égales entre elles.

Les expériences sont en général faites de la manière suivante. On fait tourner le prisme de Nicol jusqu'à ce que le plan de polarisation fasse un angle de 45° avec la verticale, et la lunette est réglée de telle manière que le fil vertical du réticule passe par les deux points lumineux, et le fil horizontal au milieu des deux franges horizontales de la lumière diffractée. Après avoir fait tourner la lunette d'un angle β, on amène les deux franges à la même intensité en faisant tourner le quartz. La lunette est de nouveau ramenée à 0° et le Nicol est tourné jusqu'à ce qu'une des franges devienne complètement invisible.

Si maintenant le prisme de Nicol a fait une rotation d'un angle δ ($\delta + 90°$ ou $\delta + 180°$), le plan de polarisation a fait une rotation de $\delta°$, en admettant toutefois que la lumière ne soit pas polarisée elliptiquement par la diffraction. Si l'angle δ est positif, le plan de polarisation est devenu plus horizontal.

J'ai souvent aussi déterminé d'abord δ et ensuite l'angle de diffraction β pour lequel les deux franges ont une clarté égale.

Il peut pourtant se glisser ici une erreur, que je n'ai remarquée qu'après avoir fait plusieurs expériences. Si par exemple la partie supérieure d'un réseau donne une image de diffraction d'une intensité plus grande que celle de la partie inférieure, l'image supérieure sera trop claire, lors même que le réseau couvrirait tout l'objectif, ce qui était toujours le cas. Si cette image est polarisée

horizontalement, δ sera trop grand; si au contraire elle est polarisée verticalement, δ sera trop petit. Une expérience complète doit donc être suivie d'une autre, dans laquelle le quartz est tourné de 180°; la moyenne des deux valeurs de δ sera alors la vraie valeur.

Si l'on ne fait pas cette correction, on peut commettre des erreurs considérables, en particulier avec des réseaux au noir de fumée, et je présume que ce sont précisément des erreurs de cette nature qu'a dû commettre Holzmann.

Il observa en effet avec un réseau au noir de fumée, pour une diffraction de 20°, une différence sensible de clarté entre les deux images polarisées verticalement et horizontalement. Une telle différence se verrait avec n'importe quel réseau au noir de fumée, car ils présentent tous cette cause d'erreur; l'une des deux images, supérieure et inférieure, paraîtra plus claire que l'autre, mais indépendamment de la direction de polarisation. Avec un réseau absolument parfait M. Holzmann n'aurait pu observer la petite différence qui se produit en réalité.

Mes premières expériences ont été faites avec des réseaux tracés sur or (1000 stries par pouce de Paris). La lumière polarisée sous un angle de 45° avec la verticale donna après diffraction deux images dont je ne pus faire disparaître aucune par la rotation du quartz; ce qui se montra encore plus évident quand le réseau fut tourné obliquement. Il fallait donc ou que la lumière diffractée fût polarisée elliptiquement ou qu'elle fût en partie transformée en lumière naturelle. C'est la première supposition qui était juste, ce que j'ai conclu du fait qu'on peut par diffraction transformer la lumière polarisée elliptiquement en lumière polarisée en ligne droite ou en

cercle. En effet, quand je faisais passer la lumière polarisée dans un azimut α par un parallélépipède de Fresnel, dont les surfaces réfléchissantes faisaient un angle de 45° avec la verticale, on pouvait toujours choisir α de manière à faire évanouir complètement l'une des deux images, ou de telle sorte que les images eussent toujours une clarté égale quand on tournait le quartz.

Par des mesures faites de cette dernière manière, je me suis convaincu que le phénomène est essentiellement identique à celui qu'on voit par la réflexion sur une surface métallique polie, car l'effet de la lumière transmise et diffractée par l'ouverture est presque imperceptible en comparaison de la lumière réfléchie par les bords.

Je construisis ensuite différents réseaux au noir de fumée. Des verres bien polis furent noircis à la fumée de camphre, puis humectés de quelques gouttes d'essence de térébenthine, afin de fixer la fumée sur le verre; enfin les plaques de verre furent divisées en stries longues d'un pouce au moyen d'une machine à diviser (2, 5, 10, 16 stries par millimètre). Avec ces réseaux je n'ai pas observé de polarisation elliptique. J'ai n'ai trouvé aucune différence perceptible entre les divers réseaux; c'est pourquoi je me borne à indiquer la moyenne de toutes les expériences faites avec les différents réseaux.

Le réseau étant perpendiculaire au rayon incident, et la couche de fumée tournée vers la lunette, comme c'était le cas dans les expériences de Holzmann, la rotation du plan de polarisation était extrêmement petite; aussi me suis-je borné à déterminer exactement cette rotation pour un seul angle de diffraction (65°). Le plan de polarisation était incliné, comme dans toutes les expériences suivantes, d'un angle de 45° sur la verticale.

Comme moyenne j'ai trouvé pour $\beta = 65°$

$$\delta = 1° 52'.$$

Le plan de polarisation s'était donc rapproché très peu de l'horizontalité. En faisant β plus grand, j'ai trouvé que δ devenait plus petit, ce qui m'a fort surpris au commencement.

En tournant le réseau et en disposant la couche de fumée du côté opposé au rayon incident et normalement à ce rayon, on augmenta la rotation du plan de polarisation dans la même direction positive; et j'ai trouvé pour $\beta = 65°$

$$\delta = 12° 30'.$$

Ces résultats ne sont donc concordants ni avec les expériences de Holzmann ni avec les conclusions qui semblent le plus immédiatement découler de la théorie. Je crois pourtant qu'ils peuvent être expliqués de la manière suivante. Si la lumière va d'abord par le verre et ensuite par le réseau au noir de fumée, tout se passe à peu près comme si le noir de fumée était dans l'intérieur du verre, ce qu'on peut aussi conclure du fait qu'aucune réflexion n'a lieu à la surface de séparation du verre et du noir de fumée. La diffraction a donc lieu dans l'intérieur du verre, puis le rayon diffracté est réfracté en sortant du verre. Soit β_1 la diffraction dans le verre (β la diffraction observée) et n l'indice de réfraction du verre; on aura $\sin\beta = n \sin\beta_1$. Par la réfraction, le plan de polarisation est de nouveau dévié et devient plus vertical. Supposons donc que les vibrations soient perpendiculaires au plan de polarisation; alors la rotation δ_1 de ce plan, produite par la diffraction β_1, est déterminée par l'équation

$$\operatorname{tg}(45° - \delta_1) = \cos\beta_1.$$

Par suite, si δ désigne la rotation du plan de polarisation après la réfraction par l'autre surface du verre, on trouve au moyen des formules de Fresnel

$$\operatorname{tg}(45^\circ-\delta) = \frac{\operatorname{tg}(45^\circ-\delta_1)}{\cos(\beta-\beta_1)} = \frac{\cos\beta_1}{\cos(\beta-\beta_1)}.$$

L'indice moyen de réfraction n a été déterminé par des expériences sur l'angle de polarisation; j'ai trouvé

$$\log n = 0,18886.$$

Si $\beta = 65^\circ$, on obtient $\delta = 2^\circ 11'$, ce qui s'accorde bien avec les expériences, qui ont donné $\delta = 1^\circ 52'$. Que δ devienne plus petit quand β devient plus grand, comme l'ont montré les expériences, c'est ce qui résulte aussi de ce calcul. Si au contraire le noir de fumée est tourné du côté du rayon incident, la lumière est diffractée avant de passer par les deux surfaces du verre. On aura donc

$$\operatorname{tg}(45^\circ-\delta) = \frac{\cos\beta}{\cos^2(\beta-\beta_1)}\,*,$$ * NOTE 9.

et par suite, pour $\beta = 65^\circ$,

$$\delta = 16^\circ 2' 30''.$$

Les expériences ont donné ici une valeur décidément trop petite, ce qui indique que la manière dont les choses se passent n'est qu'approximativement celle qui a été supposée, et que la diffraction du rayon a lieu en partie dans l'intérieur du verre. C'est ce qui devient plus manifeste si l'on place le réseau dans une position oblique, de manière qu'il fasse des angles égaux avec le rayon incident et avec l'axe de la lunette; j'ai trouvé,

en effet, pour une diffraction de 90°, δ égal à 20° et non à 45°, comme l'exigerait le calcul.

On voit donc qu'on peut trouver en somme une explication naturelle des phénomènes, quoiqu'ils soient très compliqués, en supposant les vibrations perdendiculaires au plan de polarisation, tandis qu'on ne peut en aucune manière faire concorder la supposition opposée avec les expériences.

Pour rendre les résultats moins compliqués et plus accessibles au calcul, j'ai préparé d'une autre manière les réseaux au noir de fumée. On fit fondre sur les réseaux du baume de Canada et on appliqua sur le tout une plaque de verre bien poli, ce qu'on peut faire aisément sans altérer le réseau. Les indices de réfraction du baume et du verre étant à peu près les mêmes, on peut facilement soumettre les phénomènes au calcul.

Les réseaux furent disposés de manière à faire des angles égaux avec le rayon incident et avec l'axe de la lunette. On reconnut alors que la composante polarisée verticalement de la lumière incidente était plus affaiblie que la composante polarisée horizontalement, et que par conséquent la rotation du plan de polarisation était positive, quoique les réflexions aux deux surfaces du verre eussent dû faire tourner le plan de polarisation dans la direction opposée. Comme moyenne de nombreuses expériences exécutées avec des réseaux différents (2, 5, 10 stries par millimètre), j'ai trouvé

β =	40°	50°	60°	70°	80°	90°	100°
δ = observé	2° 24′	3° 00′	4° 54′	6° 36′	7° 42′	9° 06′	12° 03′
δ = calculé	2° 30′	3° 54′	5° 37′	7° 37′	9° 53′	12° 22′	15° 00′

Dans ce tableau δ est calculé par l'équation

$$\operatorname{tg}(45^\circ - \delta) = \frac{\cos \beta_1}{\cos^2 \frac{1}{2}(\beta - \beta_1)}, \quad n \sin \tfrac{1}{2}\beta_1 = \sin \tfrac{1}{2}\beta,$$

$\frac{1}{2}\beta$ est l'angle que fait le rayon incident avec la normale au réseau, $\frac{1}{2}\beta_1$ est celui que fait le rayon réfracté avec la même normale, la diffraction dans l'intérieur du verre étant égale à β_1.

On voit que les expériences s'accordent assez bien avec les calculs; elles donnent pourtant toutes une rotation trop petite. Quelle que soit la cause de cet écart, les expériences confirment toutes la supposition que les vibrations sont perpendiculaires au plan de polarisation, car dans le cas contraire le valeur de δ serait négative et beaucoup plus grande.

J'ai étudié en outre la diffraction au moyen de réseaux métalliques noircis au noir de fumée. Lorsqu'ils étaient tout à fait noirs et mats, ils donnaient une image de diffraction beaucoup trop faible; pour cette raison on les rendit plus luisants au moyen d'une goutte de térébenthine, versée sur la surface noircie du réseau. Le réseau devait aussi être assez fin et surtout très exact. Quelques expériences exécutées avec un réseau qui avait 200 fils par pouce de Paris (l'épaisseur du fil était $\frac{1}{600}''$) et qui faisait des angles égaux avec le rayon incident et avec l'axe de la lunette, me donnèrent les résultats suivants

β	25°	35°	40°	45°	50°	55°
δ	10°	16°	20°	25°	30°	35°

La rotation est positive, mais beaucoup plus grande que celle que donne le calcul. La polarisation de la

lumière diffractée se montra aussi légèrement elliptique, d'où l'on peut conclure que la réflexion du métal n'était pas parfaitement abolie par le noir de fumée. Quand j'ai essayé de noircir le réseau de nouveau, il a perdu quelque peu de son exactitude; il fut impossible de s'en servir dans des expériences ultérieures de cette espèce. Je n'ai pas réussi à obtenir des résultats exacts avec d'autres réseaux formés de fils; l'emploi de ceux-ci entraîne des difficultés particulières pour faire évanouir la réflexion sur les bords et en même temps pour obtenir une image de diffraction assez grande et suffisamment claire. Les résultats obtenus ne sont pourtant pas dépourvus d'intérêt par cette raison que les valeurs trop grandes de δ peuvent être expliquées facilement au moyen de la polarisation elliptique.

En effet, si l'on suppose que la différence de phase des composantes horizontale et verticale soit égale à Δ, et que δ_1 représente la rotation, pourvu qu'il n'existe pas de polarisation elliptique, un calcul facile donne

* NOTE 10.

$$\operatorname{tg} 2\delta = \frac{\operatorname{tg} 2\delta_1}{\cos \Delta}.*$$

δ est donc toujours plus grand que δ_1, mais les signes de ces deux angles sont les mêmes.

Puisque les expériences ont montré que δ est positif, elles confirment en tout cas les résultats déjà obtenus:

Que les vibrations de l'éther lumineux sont perpendiculaires au plan de polarisation.

Copenhague, le 28 janvier 1860.

NOTES.

NOTE 1. En ce qui concerne la critique du mémoire de Lorenz, je ferai les remarques suivantes. Eisenlohr a traité le même problème que Lorenz (Poggendorf Annalen CIV) dans la supposition que le milieu diffringent n'est pas le même que le milieu d'incidence; il trouve alors une formule différente de celle de Stokes (Lorenz, p. 9). Les expériences de Holzmann (Holzmann: Das polarisirte Licht schwingt in der Polarisationsebene. Poggendorf Annalen XCIX, p. 446) ont confirmé l'exactitude de la formule d'Eisenlohr. Celui-ci prend pour point de départ les conditions de continuité de Cauchy et suppose que la surface qui diffracte la lumière ne prend pas part aux vibrations. Le résultat trouvé par Holzmann, à savoir que les vibrations de la lumière sont perpendiculaires au plan de polarisation, est cependant en concordance avec le résultat de Lorenz.

Les „Fortschritte der Physik" 1860, t. 16, s'expliquent ainsi sur le mémoire de Lorenz (p. 224):

„M. Eisenlohr exprime aussi les conditions qui doivent être remplies par la paroi rigide, à savoir que la lumière incidente ne soit ni réfléchie par elle ni transmise à travers elle. Le mémoire en question (celui de Lorenz) ne mentionne pas de conditions analogues."

La critique, au fond, n'est pas tout à fait juste; car quoique Lorenz ne mentionne pas les conditions en

développant les formules, il a soin de dire dans quel cas il entend se servir de ces formules (p. 10):

„Toutefois on ne doit pas perdre de vue le fait, supposé dans toute cette analyse, que l'écran est un plan qui ne prend pas part aux vibrations et qui ne réfléchit pas de lumière par ses bords.“ Lorenz dit donc ici que ses conditions sont les mêmes que celles d'Eisenlohr.

Un reproche beaucoup plus grave, c'est que les intégrations des équations différentielles ne peuvent pas être regardées comme correctes (voir p. 24).

Les „Fortschritte“ font la critique suivante des expériences de Lorenz (t. 16, p. 224):

„Les expériences que l'auteur a exécutées pour déterminer la direction des vibrations n'ont aucun intérêt, à l'exception de celles qui satisfont à l'hypothèse impliquée dans la formule, à savoir que le milieu est le même des deux côtés de l'ouverture. Cependant, même dans ce cas, à en juger par les nombres que donne l'auteur, l'accord du calcul et des observations est trop faible, surtout en comparaison de l'accord entre la formule d'Eisenlohr et les expériences de Holzmann, pour justifier une communication spéciale des valeurs numériques.“

En ce qui concerne cette critique, l'éditeur fera remarquer que, dans les cas où les expériences de Lorenz ne remplissent pas les conditions de la formule, Lorenz dit lui-même comment cette formule doit, à son avis, être modifiée, et il obtient ainsi une telle concordance entre l'observation et le calcul, qu'on peut supposer que les considérations dont il fait usage sont justes au fond, bien que les phénomènes dépendent encore de conditions complémentaires (ainsi qu'il l'admet lui-même).

NOTE 2. Stokes: Die Richtung der Schwingungen des polarisirten Lichts. Wien. Sitz. Bericht. XII. 1854. Pogg. Ann. XCVI. 1855, p. 288—292.

NOTE 3. Voir la remarque p. 10 citée ci-dessus: „Toutefois on ne doit pas, etc.“

NOTE 4. Les équations (3) ne sont pas contradictoires avec les équations (1) et (2), mais elles ne peuvent pas être dérivées de celles-ci. On voit pourtant que, si les équations (1) et (2) et deux des équations (3) ont lieu en même temps, la dernière équation est une conséquence des autres. On a donc ajouté ici des conditions nouvelles.

Il faut encore remarquer que u, v, w, les composantes de la vibration lumineuse incidente, sont des quantités données, qui satisfont aux équations différentielles posées. Il faut donc déterminer les six fonctions u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2 en remarquant que les premières n'existent que pour x positif, les dernières que pour x négatif. Elles sont toutes égales à zéro si $x = 0$ et si le point (x, y, z) est en dehors de l'ouverture.

NOTE 5. En supposant que l'équation (7) soit exacte (nous verrons tout à l'heure si cette supposition est admissible), on obtiendra facilement les équations (8) et (9). Car toutes les fonctions désignées par des majuscules grecques sont des fonctions paires de x; leurs dérivées par rapport à y et z sont donc aussi des fonctions paires de x, et leurs dérivées par rapport à x sont paires ou impaires selon qu'elles sont d'un ordre pair ou impair. Les équations (6) montrent (en ayant égard aux expressions à droite des équations) que F est une fonction impaire, F_1 une fonction paire de x.

On verra, dans ce qui suit, que $\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right]^{x=0} = 0.$

NOTE **6**. On a, pour $x = 0$,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \varphi, \quad \frac{\partial \Psi_1}{\partial x} = \psi_1, \quad \frac{\partial X_1}{\partial x} = x_1,$$

et par suite, en vertu de l'équation

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\Phi + \frac{\partial \Psi_1}{\partial y} + \frac{\partial X_1}{\partial z}\right] = \frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2},$$

$$\frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = \varphi + \frac{\partial \psi_1}{\partial y} + \frac{\partial \chi_1}{\partial z} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right] = 0$$

à cause de (8) et (9).

On aura donc $F = pt + q$, p et q étant des constantes, et, en supposant que F soit une fonction périodique, $p = 0$, $q = 0$. La première supposition, que $F = 0$ pour $x = 0$, est donc vérifiée.

On aura aussi $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0$ pour $x = 0$, car on aura

$$\Delta^2 F = \frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0$$

et

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 0.$$

Enfin on peut de la même manière démontrer que, pour $x = 0$, on a $\frac{\partial F_1}{\partial x} = 0$; en effet

$$\frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2 \frac{\partial F_1}{\partial x}}{\partial t^2} = \frac{\partial^3 \Phi_1}{\partial x^3} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 X}{\partial x \partial z},$$

et par conséquent, pour $x = 0$,

$$\left[\frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2 \frac{\partial F_1}{\partial x}}{\partial t^2}\right]^{x=0} = \frac{\partial^3 \Phi_1}{\partial x^3} + \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \chi}{\partial z} = \left[\frac{\partial^3 \Phi_1}{\partial x^3}\right]^{x=0} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right]$$

$$= \left[\frac{\partial^3 \Phi_1}{\partial x^3}\right]^{x=0} - \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]^{x=0}.$$

Mais on a trouvé

$$\left[\frac{\partial \Phi_1}{\partial x}\right]^{x=0} = \varphi_1 = \left[\frac{1}{2}u\right]^{x=0},$$

et, la fonction $\frac{\partial \Phi_1}{\partial x}$ satisfaisant à l'équation

$$\Delta^2 = \frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2},$$

on aura

$$\Delta^2\left[\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} - \frac{1}{2}u\right]^{x=0} = \frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} - \frac{1}{2}u\right]^{x=0} = 0$$

et

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} - \frac{1}{2}u\right]^{x=0} = 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left[\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} - \frac{1}{2}u\right]^{x=0} = 0.$$

Il en résulte

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} - \frac{1}{2}u\right]^{x=0} = 0$$

et ensuite

$$\left[\frac{\partial^2 \frac{\partial F_1}{\partial x}}{\partial t^2}\right]^{x=0} = 0, \quad \left[\frac{\partial F_1}{\partial x}\right]^{x=0} = pt + q,$$

p et q étant des constantes. Si nous supposons que $\frac{\partial F_1}{\partial x}$ soit une fonction périodique, on aura comme ci-dessus

$$p = 0, \quad q = 0, \quad \left[\frac{\partial F_1}{\partial x}\right]^{x=0} = 0.$$

Les fonctions trouvées satisfont à toutes les équations de condition mentionnées explicitement par Lorenz. Cependant il y a des conditions que Lorenz n'indique pas d'une manière explicite, mais qu'il admet implicitement, et auxquelles les fonctions trouvées ne satisfont pas: à savoir que le rayon réfléchi et le rayon diffracté s'évanouissent l'un et l'autre pour $x = 0$ en dehors de l'ouverture; car notre calcul fait voir seulement que les différences $u_1 - u_2$, $v_1 - v_2$, $w_1 - w_2$ sont nulles dans ce cas, mais non que u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2 sont elles-mêmes égales à zéro. Au contraire on peut voir que dans le cas supposé ces fonctions ne sont pas nulles en général.

Mais de plus la solution donnée par Lorenz du problème de la diffraction n'est pas satisfaisante au point de vue mathématique, par cette raison qu'elle n'est pas la seule possible. En effet l'équation différentielle $\Delta^2 u = \frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ est aussi bien vérifiée par $\frac{\varphi(\omega t + r)}{r}$ que par $\frac{\varphi(\omega t - r)}{r}$, et la fonction Φ, de même que les fonctions analogues et leurs dérivées, conserveront tous leurs caractères si l'on remplace $\omega t - r$ par $\omega t + r$.

On aura donc au moins deux solutions, qui au point de vue mathématique sont également légitimes.

NOTE 7. En posant, comme dans le mémoire,

$$S = -\frac{1}{2\pi\rho}\iint d\beta\, d\gamma \sin k(\omega t - \rho + (m-b)\beta + (n-c)\gamma),$$

$$C = -\frac{1}{2\pi\rho}\iint d\beta\, d\gamma \cos k(\omega t - \rho + (m-b)\beta + (n-c)\gamma),$$

et en supposant ρ très grand, on peut exprimer toutes les fonctions Φ, Ψ, ... et leurs dérivées au moyen de S et C.

On aura ainsi

$$\Phi = \tfrac{1}{2} a k \xi S, \quad \Psi = \tfrac{1}{2} a k \eta S, \quad X = \tfrac{1}{2} a k \zeta S,$$
$$\Phi_1 = \tfrac{1}{2} \xi C, \quad \Psi_1 = \tfrac{1}{2} \eta C, \quad X_1 = \tfrac{1}{2} \zeta C.$$

Différentions en regardant l, m, n comme des constantes, ce qui est permis, pourvu que x, y, z soient grands; nous aurons alors

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} = \tfrac{1}{2} \xi k l S, \quad \frac{\partial \Psi_1}{\partial x} = \tfrac{1}{2} \eta k l S, \quad \frac{\partial X_1}{\partial x} = \tfrac{1}{2} \zeta k l S,$$

et

$$\frac{1}{\omega^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 X_1}{\partial x \partial z} = -\tfrac{1}{2} k^2 l (a\xi + m\eta + n\zeta) C,$$
$$F = \tfrac{1}{2} l (a\xi + m\eta + n\zeta) C,$$

en supposant que F soit une fonction périodique de t. De la même manière on aura

$$\frac{1}{\omega^2} \frac{\partial^2 F_1}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} + \frac{\partial X}{\partial z} = \tfrac{1}{2} k^2 (\xi l^2 + a m \eta + a n \zeta) C,$$
$$F_1 = \tfrac{1}{2} (\xi l^2 + a m \eta + a n \zeta) C,$$
$$F + F_1 = \tfrac{1}{2} (l + a)(\xi l + m\eta + n\zeta) C.$$

Ces expressions conduiront facilement aux formules données dans le mémoire.

Si x, y, z ne sont pas tous très grands, les formules subsisteront encore, pourvu que ρ ait une très grande valeur; car si, dans ce cas, x par exemple n'est pas très grand, les termes qui contiennent x, ainsi que les dérivées de ces termes, seront négligeables.

NOTE 8. La formule de Stokes résulte aisément des expressions trouvées pour u_1, v_1, w_1.

On prend pour plan des xy le plan du rayon incident et du rayon diffracté; on aura alors $c = 0$, $n = 0$, $a\xi + b\eta = 0$.

La normale au plan d'incidence est l'axe des z, et l'on a

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}{\zeta} = \frac{\pm \xi}{\zeta b},$$

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\sqrt{u_1^2 + v_1^2}}{w_1} = \pm \frac{(l\eta - m\xi)}{\zeta}$$

$$= \pm \frac{(la + mb)\xi}{b\zeta} = \pm \operatorname{tg} \alpha \cos \beta,$$

car $la + mb$ est le cosinus de l'angle que font le rayon incident et le rayon diffracté.

NOTE **9**. On peut facilement vérifier la formule en remarquant que l'on a ici trois rotations du plan de polarisation, produites: 1) par la diffraction du rayon avant son entrée dans le verre; 2) par l'entrée; 3) par la sortie du verre.

NOTE **10**. Ici δ désigne l'angle que fait le grand axe de l'ellipse avec une ligne perpendiculaire au rayon qui fait un angle de 45° avec le plan d'incidence. Le plan d'incidence est supposé horizontal, et nous supposons que y soit la composante horizontale, z la composante verticale des vibrations elliptiques, tandis qu'elles seraient η et ζ si les vibrations restaient rectilignes. On aura donc

$$\operatorname{tg} (45° - \delta_1) = \frac{\eta}{\zeta},$$

$$z = \zeta \cos \varphi,$$

$$y = \eta \cos (\varphi - \Delta),$$

où φ désigne un angle variable, et l'équation de l'ellipse sera

$$\frac{y^2}{\eta^2 \sin^2 \Delta} + \frac{z^2}{\zeta^2 \sin^2 \Delta} - \frac{2 yz \cos \Delta}{\zeta \eta \sin^2 \Delta} = 1.$$

Mais si $\alpha = 45^\circ - \delta$ est l'angle que fait l'axe de llipse avec la normale au plan d'incidence, on voit, mme à l'ordinaire, que

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\eta\zeta\cos\varDelta}{\zeta^2 - \eta^2}.$$

Or cette équation est identique à celle de Lorenz. utefois les considérations de Lorenz n'expliquent guère phénomène: car pour $\beta = 25^\circ$, la formule de Stokes nnerait $\delta_1 = 2^\circ 49'$ et l'observation $\delta = 10^\circ$, tandis que formule $\operatorname{tg} 2\delta = \frac{\operatorname{tg} 2\delta_1}{\cos\varDelta}$ donne $\varDelta = 74^\circ 16'$; la polariion serait donc presque circulaire, et non pas, comme dit Lorenz, „légèrement elliptique".

SUR

LA RÉFLEXION DE LA LUMIÈRE

A LA SURFACE DE SÉPARATION DE DEUX MILIEUX TRANSPARENTS ET ISOTROPES.

SUR LA RÉFLEXION DE LA LUMIÈRE A LA SURFACE DE SÉPARATION DE DEUX MILIEUX TRANSPARENTS ET ISOTROPES.* * NOTE 1.

POGGENDORF ANN. CXI. P. 460–473.
PHIL. MAGAZ. XXI. P. 180–191.

Jamin* a, comme on sait, trouvé que les formules * NOTE 2. de Fresnel relatives aux intensités des rayons de lumière réfléchis et réfractés par la surface de deux milieux isotropes et transparents ne sont pas tout à fait d'accord avec l'expérience; un écart appréciable se produit en effet, quand l'angle d'incidence s'approche de l'angle de polarisation. Cauchy* avait déjà auparavant démontré * NOTE 3. que des ondes a vibrations longitudinales devaient se former dans ce cas, et en supposant que ces ondes étaient absorbees rapidement (mais non infiniment vite, car alors on retomberait sur les formules de Fresnel), il avait introduit dans ces formules une correction qui les rendait conformes aux expériences.

Mais le calcul de la réfraction de la lumière n'a jusqu'a ce jour été fait qu'en supposant un passage brusque d'un milieu à l'autre, et par conséquent aussi une variation brusque de l'indice de réfraction à la surface de séparation. Mais un tel passage n'est qu'une abstraction, qui certainement n'a pas lieu dans la nature,

et on parvient à un résultat plus correct et en général plus admissible, si l'on suppose que la transition s'opère sur une certaine étendue qu'on peut ensuite faire aussi petite qu'on veut. D'ailleurs, c'est un fait que les corps sont entourés d'une atmosphère, qui doit produire un changement continu de l'indice de réfraction.

Le but de ce mémoire est de montrer que les expériences de Jamin peuvent être expliquées complètement par les formules de Fresnel étendues de la manière que j'ai dite.

On ne tient pas compte, dans ce qui suit, du cas de la réflexion totale. Si la lumière incidente est polarisée dans le plan d'incidence, et si l'on désigne par x l'angle d'incidence, par x_1 l'angle de réfraction, le rapport des amplitudes des rayons incident, réfracté et réfléchi est, d'après Fresnel,

* NOTE 4.

$$1 : \frac{2 \cos x \sin x_1}{\sin (x + x_1)} : \frac{\sin (x - x_1)}{\sin (x + x_1)}. \qquad (1)^*$$

Pour la lumière polarisée perpendiculairement au plan d'incidence, le rapport des trois amplitudes est

$$1 : \frac{2 \cos x \sin x_1}{\sin (x + x_1) \cos (x - x_1)} : - \frac{\operatorname{tg} (x - x_1)}{\operatorname{tg} (x + x_1)}. \qquad (2)$$

Nous supposerons à présent que ces formules sont admissibles dans le cas où x_1 diffère infiniment peu de x. Si donc l'on suppose $x_1 = x + dx$, les expressions (1) et (2) deviendront

$$1 : 1 + \frac{dx}{\sin 2x} : - \frac{dx}{\sin 2x}, \qquad (3)$$

$$1 : 1 + \frac{dx}{\sin 2x} : \frac{dx}{\operatorname{tg} 2x}. \qquad (4)$$

On suppose que le rayon incident frappe la surface de séparation des deux milieux sous un angle que nous désignons par α. Ici, dans le voisinage de la surface de séparation, le rayon traversera des couches planes parallèles, qui feront varier l'angle d'incidence d'une manière continue, jusqu'à ce que le rayon soit complètement entré dans le second milieu, où l'angle d'incidence variable x prendra une valeur constante, que nous désignerons par β, et qui sera l'angle de réfraction observé.

Nous négligerons d'abord la perte de phase du rayon pour faciliter les calculs.

Supposons que A soit l'amplitude du rayon incident et que pour le rayon réfracté cette amplitude devienne χ et $\chi + d\chi$, pendant que l'angle d'incidence passe de la valeur α aux valeurs x et $x + dx$. On aura donc, quelle que soit la polarisation, en vertu de (3) et (4),

$$\frac{d\chi}{\chi} = \frac{dx}{\sin 2x},$$

et par conséquent, en intégrant et en déterminant convenablement la constante,

$$\chi = A\sqrt{\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} \alpha}}.$$

Le rayon réfléchi par cette couche aura, en vertu de (3), l'amplitude $-\chi \frac{dx}{\sin 2x}$, s'il est polarisé dans le plan d'incidence, et en vertu de (4) l'amplitude $\chi \frac{dx}{\operatorname{tg} 2x}$, s'il est polarisé perpendiculairement à ce plan. Nous désignons les deux valeurs par χdu, en posant dans le premier cas

$$u = -\tfrac{1}{2} \log \operatorname{tg} x \tag{5}$$

et dans le seconde cas

$$u = \tfrac{1}{2} \log \sin 2x. \tag{6}$$

L'amplitude du rayon réfléchi est donc

$$\chi du = A\sqrt{\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} \alpha}}du,$$

et quand ce rayon est parvenu à une couche pour laquelle l'angle de réfraction est x_1, l'amplitude devient

$$\chi\sqrt{\frac{\operatorname{tg} x_1}{\operatorname{tg} x}}du = A\sqrt{\frac{\operatorname{tg} x_1}{\operatorname{tg} \alpha}}du.$$

A la limite de cette couche et de la couche suivante, où l'angle de réfraction est $x_1 - dx_1$, une partie de la lumière est de nouveau réfléchie. Si nous désignons par u_1 une fonction formée avec x_1 comme u l'est avec x, l'amplitude du rayon réfléchi deux fois sera

$$-A\sqrt{\frac{\operatorname{tg} x_1}{\operatorname{tg} \alpha}}du\,du_1,$$

et si enfin ce rayon a traversé toutes les couches jusqu'à ce qu'il fasse un angle de réfraction constant égal à β, alors l'amplitude sera

$$-A\sqrt{\frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha}}du\,du_1.$$

L'angle x_1 peut avoir toutes les valeurs entre α et x, et l'angle x toutes les valeurs entre α et β. La somme des amplitudes de tous les rayons réfléchis deux fois sera donc exprimée par l'intégrale double

$$-A\sqrt{\frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha}}\int_{u_\alpha}^{u_\beta}du\int_{u_\alpha}^{u}du_1,$$

u_α et u_β désignant les valeurs de u pour $x = \alpha$ et $x = \beta$.

On trouve aisément de la même manière la somme les amplitudes des rayons réfléchis 4, 6 ... fois, et comme e rayon réfracté total est formé par la superposition les différents rayons, qui sont réfléchis 0, 2, 4 ... fois, 'amplitude de celui-ci sera

$$-A\sqrt{\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha}}\left[1-\int_{u_\alpha}^{u_\beta}du\int_{u_\alpha}^{u}du_1+\int_{u_\alpha}^{u_\beta}du\int_{u_\alpha}^{u}du_1\int_{u_1}^{u_\beta}du_2\int_{u_\alpha}^{u_2}du_3\ldots\right]. \quad (7)$$

Nous désignons la valeur de cette série par

$$A\sqrt{\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}}f(u_\alpha),$$

où

$$f(u)=1-\int_{u}^{u_\beta}du\int_{u_\alpha}^{u}du_1 f(u_1).$$

De la dernière équation on tire par différentiation

$$f'(u)=\int_{u_\alpha}^{u}du_1 f(u_1)$$

et

$$f''(u)=f(u)$$

et en conséquence

$$f(u)=ce^u+c_1e^{-u},$$

où l'on peut déterminer les constantes par les conditions

$$f(u_\beta)=1 \quad \text{et} \quad f'(u_\alpha)=0.$$

On aura donc

$$f(u)=\frac{e^{u-u_\alpha}+e^{u_\alpha-u}}{e^{u_\alpha-u_\beta}+e^{u_\beta-u_\alpha}},$$

et la valeur de la série (7) ou de l'amplitude du rayon réfracté sera

$$\frac{2A\sqrt{\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha}}}{e^{u_\beta - u_\alpha} + e^{u_\alpha - u_\beta}}. \tag{8}$$

Si nous cherchons l'amplitude du rayon polarisé dans le plan d'incidence et si nous désignons cette amplitude par B, il faut, en vertu de (5), poser dans l'expression (8)

$$u = -\tfrac{1}{2}\log \operatorname{tg} x,$$

et l'on trouvera

$$B = 2A\frac{\cos\alpha \sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}. \tag{9}$$

Si l'on pose au contraire dans (8)

$$u = \tfrac{1}{2}\log \sin 2x,$$

on obtiendra l'amplitude B' du rayon polarisé perpendiculairement au plan d'incidence, à savoir

$$B' = 2A\frac{\cos\alpha \sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}. \tag{10}$$

Nous retombons donc ainsi sur les formules de Fresnel, ce qui montre une propriété remarquable de celles-ci. En effet le calcul ne suppose au fond que les relations (3) et (4), et ces relations peuvent être déduites de bien d'autres formules que de celles de Fresnel.

L'amplitude du rayon réfléchi total, qui est la somme des amplitudes des rayons réfléchis 1, 3, 5 ... fois, se trouve d'une manière semblable et est exprimée par la série suivante:

$$A\left[\int_{u_\alpha}^{u_\beta} du - \int_{u_\alpha}^{u_\beta} du \int_{u_\alpha}^{u} du_1 \int_{u_1}^{u_\beta} du_2 + \int_{u_\alpha}^{u_\beta} du \int_{u_\alpha}^{u} du_1 \int_{u_1}^{u_\beta} du_2 \int_{u_\alpha}^{u_2} du_3 \int_{u_3}^{u_\beta} du_4 \ldots\right]. \tag{11}$$

Nous désignons cette série par

$$A\int_{u_\alpha}^{u_\beta} du f(u),$$

où

$$f(u) = 1 - \int_{u_\alpha}^{u} du_1 \int_{u_1}^{u_\beta} du_2 f(u_2).$$

On tire de la dernière équation

$$f(u) = \frac{e^{u-u_\beta} + e^{u_\beta - u}}{e^{u_\alpha - u_\beta} + e^{u_\beta - u_\alpha}},$$

et en conséquence l'expression (11) ou l'amplitude du rayon réfléchi deviendra

$$-A\frac{e^{u_\alpha - u_\beta} - e^{u_\beta - u_\alpha}}{e^{u_\alpha - u_\beta} + e^{u_\beta - u_\alpha}}. \tag{12}$$

Si l'on pose dans l'expression (12) $u = -\frac{1}{2}\log \operatorname{tg} x$, on obtiendra l'amplitude du rayon polarisé dans le plan d'incidence, et si l'on appelle R cette amplitude, on trouvera

$$R = A\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}. \tag{13}$$

Si R' est l'amplitude du rayon polarisé perpendiculairement au plan d'incidence, et si l'on pose dans l'expression (12) $u = \frac{1}{2}\log\sin 2x$, on trouvera

$$R' = -A\frac{\operatorname{tg}(\alpha - \beta)}{\operatorname{tg}(\alpha + \beta)}. \tag{14}$$

Nous retrouvons donc aussi dans ce cas les formules de Fresnel.

Le résultat est que, même dans le cas d'une variation continue de l'indice de réfraction des deux milieux et en conséquence dans le cas d'un nombre infini de réflexions à la surface de séparation, les formules de Fresnel seront encore admissibles, pourvu que l'épaisseur totale des couches intermédiaires ait une valeur infiniment petite par rapport à la longueur d'onde. Dans le cas contraire on doit tenir compte des pertes de phase des différents rayons.

La correction entrainée par ces pertes de phase n'est que d'une très minime importance pour le rayon incident et ne peut guère être démontrée par des expériences. Au contraire nous introduirons cette correction dans le calcul des amplitudes des rayons réfléchis. Une onde de lumière qui est réfléchie par la couche où l'angle de réfraction est x ou x_1, x_2 . . . et qui ensuite se combine avec l'onde réfléchie par la première couche, sera en retard sur cette dernière, et nous pouvons désigner les différences de phase respectivement par δ, δ_1, δ_2 . . . Ces quantités sont des fonctions de x, x_1, x_2 . . ., mais elles peuvent aussi être considérées comme fonctions des variables u, u_1, u_2 . . .

Nous pouvons donc désigner l'amplitude du rayon réfléchi un fois par la couche où l'angle de réfraction est x par

$$A \cos (kt - \delta)\, du\,,$$

t désignant le temps et k une constante.

On reconnait aisément, d'une manière analogue à la précédente, que l'amplitude du rayon réfléchi est exprimée par

$$A \left[\int_{u_\alpha}^{u_\beta} du \cos (kt - \delta) - \int_{u_\alpha}^{u_\beta} du \int_{u_\alpha}^{u} du_1 \int_{u_1}^{u_\beta} du_2 \cos (kt - \delta - \delta_1 - \delta_2) + \ldots \right] \quad (15)$$

Cette série est la partie réelle de

$$A\int_{u_\alpha}^{u_\beta} du\, e^{(kt-\delta)\sqrt{-1}} f(u)$$

où

$$f(u) = 1 - \int_{u_\alpha}^{u} du_1 \int_{u_1}^{u_\beta} du_2\, e^{(\delta_1 - \delta_2)\sqrt{-1}} f(u_2).$$

On déduit de cette relation l'équation différentielle

$$\frac{d}{du}\left[e^{-\delta\sqrt{-1}} f'(u)\right] = e^{-\delta\sqrt{-1}} f(u),\text{*}$$ * NOTE 5.

au moyen de laquelle on peut obtenir une expression nouvelle de la série (15), celle-ci étant la partie réelle de

$$A\left[e^{(kt-\delta)\sqrt{-1}} f'(u)\right]_{u_\alpha}^{u_\beta}$$

ou, en vertu des équations $f'(u_\beta) = 0$ et $\delta = 0$ pour $u = u_\alpha$, de

$$-A\, e^{kt\sqrt{-1}} f'(u_\alpha). \qquad (15')$$

Si l'on pose dans l'équation différentielle ci-dessus

$$f(u) = e^{\lambda\sqrt{-1}} \frac{e^{u-u_\beta} + e^{u_\beta - u}}{e^{u_\alpha - u_\beta} + e^{u_\beta - u_\alpha}},\text{*}$$ * NOTE 6.

λ sera déterminé en fonction de u par l'équation suivante

$$\frac{d^2\lambda}{du^2} + \frac{e^{u-u_\beta} - e^{u_\beta - u}}{e^{u-u_\beta} + e^{u_\beta - u}} \frac{d(2\lambda - \delta)}{du} + \frac{d\lambda}{du}\frac{d(\lambda-\delta)}{du}\sqrt{-1} = 0,$$

en remarquant que $\lambda = 0$ pour $u = u_\alpha$ et $\dfrac{d\lambda}{du} = 0$ pour $u = u_\beta$.

Nous nous bornerons au cas où les quantités $\frac{d\lambda}{du}$ et $\frac{d\delta}{du}$ sont très petites. L'équation différentielle en λ donnera dans ce cas par intégration, le dernier terme étant sensiblement égal à zéro,

$$\frac{d\lambda}{du} = -\frac{1}{\left(e^{u-u_\beta}+e^{u_\beta-u}\right)^2}\int_u^{u_\beta}\left(e^{2(u-u_\beta)}-e^{2(u_\beta-u)}\right)\frac{d\delta}{du}\,du\,.$$

En substituant dans cette expression les valeurs de u, on voit que $\frac{d\lambda}{du}$ est une petite quantité pour toutes les valeurs de l'angle d'incidence, pourvu que $\frac{d\delta}{du}$ soit petit, ce qui effectivement est la seule supposition qu'on

* NOTE 7. ait faite.*

En substituant la valeur de $f(u)$ dans (15)', la série (15) sera la partie réelle de

* NOTE 8.

$$-Ae^{kt\sqrt{-1}}\left[\frac{e^{u_\alpha-u_\beta}-e^{u_\beta-u_\alpha}}{e^{u_\alpha-u_\beta}+e^{u_\beta-u_\alpha}}+\left[\frac{d\lambda}{du}\right]^{u=u_\alpha}\sqrt{-1}\right]^*,$$

et la somme de la série sera par suite

$$-A\frac{e^{u_\alpha-u_\beta}-e^{u_\beta-u_\alpha}}{e^{u_\alpha-u_\beta}+e^{u_\beta-u_\alpha}}\left[\cos kt+\sin kt\int_{u_\alpha}^{u_\beta}\frac{e^{2(u-u_\beta)}-e^{2(u_\beta-u)}}{e^{2(u_\alpha-u_\beta)}-e^{2(u_\beta-u_\alpha)}}\frac{d\delta}{du}\,du\right].$$

En substituant dans cette expression $u=-\frac{1}{2}\log\operatorname{tg}x$, on obtiendra la valeur de l'amplitude R du rayon polarisé dans le plan d'incidence, qui sera donc

$$\left.\begin{aligned} R &= A\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}\left[\cos kt+\sin kt\operatorname{tg}\Delta\right] \\ \operatorname{tg}\Delta &= \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha-\sin^2\beta}\int_\alpha^\beta\left[\cos^2\beta\operatorname{tg}x-\sin^2\beta\operatorname{cotg}x\right]\frac{d\delta}{dx}\,dx. \end{aligned}\right\}\ (16)$$

Si l'on substitue au contraire $u = \frac{1}{2}\log\sin 2x$, on obtiendra la valeur de l'amplitude R' du rayon polarisé perpendiculairement au plan d'incidence, qui sera donc

$$\left.\begin{aligned} R' &= A\frac{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}[\cos kt + \sin kt \operatorname{tg}\Delta'] \\ \operatorname{tg}\Delta' &= \frac{\sin 2\alpha \sin 2\beta}{\sin^2 2\alpha - \sin^2 2\beta}\int_\alpha^\beta \left[\frac{\sin 2x}{\sin 2\beta} - \frac{\sin 2\beta}{\sin 2x}\right]\frac{d\delta}{dx}dx. \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

Il est évident par ces équations que $\operatorname{tg}\Delta$ est très petit pour tous les angles d'incidence, pourvu que $\frac{d\delta}{dx}$ soit petit. Au contraire $\operatorname{tg}\Delta'$ peut devenir infini, à savoir pour $\sin 2\alpha = \sin 2\beta$, si l'angle d'incidence est l'angle de polarisation, auquel cas α et β sont complémentaires.

Si Δ' est une petite quantité positive pour un angle d'incidence donné, elle deviendra, par un changement continu de l'angle d'incidence, égale à $\frac{\pi}{2}$ pour l'angle de polarisation, et ensuite elle s'approchera de π. Si au contraire Δ' est d'abord une quantité négative petite en valeur absolue, elle diminuera par un changement continu de cet angle jusqu'à $-\frac{\pi}{2}$ et ensuite jusqu'à $-\pi$.* * NOTE 9.

La perte de phase du rayon réfléchi R' par rapport à l'autre rayon R, polarisé dans le plan d'incidence, peut être exprimée par $\Delta' - \Delta$, si les coefficients de $\cos kt$ ont le même signe pour les deux rayons, c'est-à-dire si l'angle d'incidence est plus grand que l'angle de polarisation. Mais si les angles Δ' et Δ sont toujours choisis dans le premier quadrant positif ou négatif, nous pouvons ajouter un multiple arbitraire de 2π et exprimer la perte de phase par $\Delta' - \Delta + 2p\pi$, où p est un nombre entier.

Si maintenant Δ' est positif pour l'angle considéré, il grandira si l'angle d'incidence devient plus petit, et la perte de phase sera exprimée par $\Delta' - \Delta - (2p - 1)\pi$, quand l'angle d'incidence est devenu plus petit que l'angle de polarisation, si l'on choisit Δ' dans le premier quadrant.

Si au contraire Δ' est négatif pour un angle d'incidence plus grand que l'angle de polarisation, la perte de phase sera $\Delta' - \Delta - (2p - 1)\pi$, quand l'angle d'incidence est devenu plus petit que l'angle de polarisation. Ces résultats sont en concordance avec ceux qui ont été trouvés par Jamin. Dans le premier cas Jamin suppose $p = -1$, et la perte de phase sera

$$\Delta' - \Delta - 2\pi \text{ pour } \alpha - \beta > \frac{\pi}{2},$$

$$\Delta' - \Delta - \pi \quad \text{pour } \alpha - \beta < \frac{\pi}{2}.$$

Les corps qui ont ce caractère sont les corps à réflexion négative de Jamin. Dans l'autre cas (Δ' négatif pour $\alpha + \beta > \frac{\pi}{2}$), il suppose $p = 1$, et la perte de phase pour ces corps, qu'il nomme „corps à réflexion positive", sera par conséquent

$$\Delta' - \Delta + 2\pi \text{ pour } \alpha - \beta > \frac{\pi}{2},$$

$$\Delta' - \Delta + \pi \quad \text{pour } \alpha - \beta < \frac{\pi}{2}.$$

De plus M. Jamin a trouvé que la plupart des corps pour lesquels l'indice de réfraction est plus petit qu'une certaine valeur (à peu près 1,46) présentent la réflexion négative, tandis que les corps dont l'indice de réfraction est plus grand que 1,46 ont la réflexion positive. La limite des deux espèces est formée par des corps pour

lesquels la différence de phase relative à l'angle de polarisation passe brusquement de 0 à π. Ce lien remarquable entre la différence de phase et l'indice de réfraction peut être déduit de la théorie développée ; au contraire il ne peut pas être déduit de la théorie de Cauchy.

Soit en effet ρ la distance de la première couche de transition à celle pour laquelle l'angle de réfraction est x, et soit $d\rho$ la distance de cette dernière couche et de la couche suivante, pour laquelle l'angle de réfraction est $x + dx$; on trouvera sans difficulté que, si une onde est réfléchie par ces deux couches consécutives, la différence de marche des deux ondes réfléchies sera égale à $2\,d\rho \cos x$.

Soit de plus l la longueur d'onde dans le premier milieu et par suite $l \dfrac{\sin x}{\sin \alpha}$ la longueur d'onde dans la couche considérée ; alors la différence de phase qui correspond à cette différence de marche sera

$$\frac{2\pi \sin \alpha}{l \sin x} 2\,d\rho \cos x = \frac{d\delta}{dx} dx.$$

A la place de x nous pouvons substituer comme variable nouvelle le carré de l'indice de réfraction. En désignant cette variable par v, on aura

$$v = \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 x}.$$

Les limites des variables ρ et v sont pour $x = \alpha$ respectivement 0 et 1, et pour $x = \beta$ nous les désignerons par ρ_1 et v_1 ; ρ_1 est égal à l'épaisseur totale de la couche de transition et v_1 au carré de l'indice de réfraction observé.

En substituant la nouvelle valeur de $\dfrac{d\delta}{dx}$ et de x dans (16) et (17) et en intégrant par parties, on obtiendra

$$\operatorname{tg} \Delta = \frac{4\pi}{l} \frac{\cos\alpha}{v_1 - 1} \int_1^{v_1} \rho\, dv, \tag{18}$$

$$\operatorname{tg} \Delta' = \frac{4\pi}{l} \frac{v_1^2 \cos\alpha}{v_1 \cos^2\alpha - \cos^2\beta} \int_1^{v_1} \rho \left(\frac{\cos^2\beta}{v_1^2} - \frac{\sin^2\beta}{v^2} \right) dv. \tag{19}$$

On voit donc par ces équations que tg Δ est toujours positif, mais que tg Δ' peut prendre des valeurs aussi bien positives que négatives. Il y a un cas particulier où Δ' passera brusquement, pour l'angle de polarisation, de 0 à $\pm\pi$: à savoir si l'on a pour cet angle

$$\int_1^{v_1} \rho \left[\frac{\cos^2\beta}{v_1^2} - \frac{\sin^2\beta}{v^2} \right] dv = 0,$$

ou, puisque l'on a ici $\dfrac{\cos^2\beta}{\sin^2\beta} = v_1$,

$$\int_1^{v_1} \rho \left[1 - \frac{v_1}{v^2} \right] dv = 0.$$

Comme cette intégrale contient des éléments aussi bien positifs que négatifs, il est évident que cette équation est possible pour une certaine valeur de v_1. Si l'on admet que pour les différents corps ρ soit en général à peu près la même fonction de v_1, l'intégrale croîtra de

$$\left[\rho_1 \left(1 - \frac{1}{v_1} \right) - \int_1^{v_1} \rho \frac{dv}{v^2} \right] dv,$$

si v_1 reçoit l'accroissement positif dv_1; l'accroissement de l'intégrale sera plus grand que

$$\left[\rho_1 \left(1 - \frac{1}{v_1} \right) - \rho_1 \int_1^{v_1} \frac{dv}{v^2} \right] dv_1 = 0.$$

Il sera donc positif, et l'on voit que l'intégrale définie qui figure dans (19) sera positive si v_1 surpasse une

certaine valeur et en conséquence que Δ' sera dans ce cas négatif pour $v_1 \cos^2\alpha - \cos^2\beta < 0$, c'est-à-dire pour $\alpha + \beta > \frac{\pi}{2}$, si la lumière, comme dans les expériences de Jamin, passe dans un corps plus réfringent ($\alpha > \beta$). Mais nous avons vu ci-dessus que ce cas correspond aux corps à réflexion positive.

On peut donc montrer par le calcul comme par l'expérience que la réfraction positive a lieu pour des corps qui ont un indice de réfraction plus grand, la réflexion négative au contraire pour les corps qui ont un indice de réfraction plus petit, tandis que la différence de phase des corps qui se trouvent à la limite de ceux-là varie brusquement de 0 à $\pm\pi$.

L'intensité du rayon réfléchi polarisé perpendiculairement au plan d'incidence est en vertu de (17)

$$A^2 \frac{\operatorname{tg}^2(\alpha-\beta)}{\operatorname{tg}^2(\alpha+\beta)}(1+\operatorname{tg}^2\Delta'),$$

et l'intensité du rayon réfléchi polarisé dans le plan d'incidence est en vertu de (16)

$$A^2 \frac{\sin^2(\alpha-\beta)}{\sin^2(\alpha+\beta)}(1+\operatorname{tg}^2\Delta).$$

Si l'on désigne par k^2 le rapport des deux intensités, on obtiendra

$$k = \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)} \frac{\cos\Delta}{\cos\Delta'}. \qquad (20)$$

Ce résultat concorde avec celui que Cauchy a obtenu.

Jamin ayant aussi déterminé expérimentalement ce rapport, on peut de ses expériences, qui donnent k, l'angle d'incidence principale et l'indice de réfraction, déduire la valeur de Δ et par conséquent, en vertu de (18), la valeur de

$\int_1^{v_1} \rho \, dv$. Si l'on admet que ρ soit déterminé approximativement par la formule $\rho = \rho_1 \frac{v-1}{v_1-1}$, on peut déduire de l'expérience l'épaisseur de la couche intermédiaire.

Ceci fournit un contrôle nouveau de la théorie, qui exige que cette épaisseur soit une valeur petite et positive. Le calcul des expériences de Jamin montre en effet qu'il en est bien ainsi, quoiqu'on n'obtienne pas de cette manière, comme il était à supposer, une grande précision. J'ai trouvé ainsi que l'épaisseur de la couche pour les différents corps est comprise entre $\frac{1}{10}$ et $\frac{1}{100}$ de longueur d'onde.

Le résultat de ces recherches est donc qu'on peut expliquer complètement les expériences de Jamin par la seule supposition de couches intermédiaires d'une épaisseur insignifiante, donnant lieu à une variation continue de l'indice de réfraction, supposition qu'on a évidemment plus de droit de faire que d'exclure.

Copenhague, le 28 juin 1860.

NOTES.

NOTE 1. Une critique du mémoire se trouve dans „Fortschritte der Physik“, t. 16, p. 221. Elle sera ntionnée ci-dessous. (Voir note 6.)

NOTE 2. Jamin: Mémoire sur la réflexion de la mière par les substances transparentes. Comptes ndus, XXXI, 1848, p. 383–384. Mémoire sur la ré- ction de la lumière. Comptes rendus, XXXII, 1848, 147–150. Mémoire sur la réflexion à la surface des rps transparents. Ann. de chim. et de phys., XXIX, 263–305.

NOTE 3. Dans les Comptes rendus se trouvent de mbreux mémoires sur ce sujet (années 1836 et sui- ntes).

NOTE 4. En ce qui concerne les signes de

$$\begin{matrix} \sin(x - x_1) \\ \sin(x + x_1) \end{matrix} \quad \text{et} \quad \begin{matrix} \operatorname{tg}(x - x_1) \\ \operatorname{tg}(x + x_1) \end{matrix}$$

ir le mémoire de Lorenz, Pogg. Ann., t. CXVIII, le atrième mémoire de la présente édition.

NOTE 5. En effet on trouvera

$$f'(u) = \int_u^{u_\beta} du_1 e^{(\delta - \delta_1)\sqrt{-1}} f(u_1),$$

$$f''(u) = f(u) + f'(u) \frac{d\delta}{du} \sqrt{-1}.$$

NOTE 6. Dans les „Fortschritte der Physik", 1860, t. 16, se trouve une critique de l'intégration approchée que fait Lorenz de l'équation différentielle

$$\frac{d^2\lambda}{du^2} + \frac{e^{u-u_\beta} - e^{u_\beta - u}}{e^{u-u_\beta} - e^{u_\beta - u}} \frac{d(2\lambda - \delta)}{du} - \frac{d\lambda}{du}\frac{d(\lambda-\delta)}{du}\sqrt{-1} = 0,$$

qui est intégrée dans la supposition que $\frac{d\lambda}{du}$ et $\frac{d\delta}{du}$ soient toujours des valeurs petites. Je cite ici la critique:

„En discutant les résultats, on maintient l'hypothèse que $\frac{d\delta}{du}$ a toujours une valeur très petite. L'auteur n'a pas explicitement mentionné que dans le cas le plus important, celui où le rayon est polarisé perpendiculairement au plan d'incidence et où l'angle d'incidence est peu différent de l'angle de polarisation, cette supposition est contradictoire avec son hypothèse, que la direction du rayon réfracté change d'une manière continue et qu'en conséquence la courbe enveloppée n'a pas de point anguleux. En effet on aura, en vertu de l'équation $\frac{d\delta}{du} = \operatorname{tg} 2x \frac{d\delta}{dx}$, qui est admissible pour des rayons polarisés dans la direction susdite, et en ayant égard à l'équation $\frac{d\delta}{dx} = \frac{4\pi \sin\alpha}{l} \cot x \frac{d\rho}{dx}$ où l désigne la longueur d'onde du rayon incident et ρ la distance de la surface à la couche pour laquelle l'angle de réfraction est x,

$$\frac{d\delta}{du} = \frac{4\pi \sin\alpha}{l} \frac{1 + \cos 2x}{\cos 2x} \frac{d\rho}{dx}.$$

La couche enveloppée n'ayant par de point anguleux, le rayon de courbure $\frac{1}{\cos x}\frac{d\rho}{dx}$ (et par suite aussi $\frac{d\rho}{dx}$) ne peut pas s'évanouir pour $x = 45°$; en conséquence $\frac{d\delta}{du}$ sera infiniment grand dans la couche pour

laquelle l'angle de réfraction x est égal à 45°. Mais si l'angle de polarisation est α, il résulte de l'équation $\alpha + \beta = 90°$ que des deux angles α et β l'un est plus grand, l'autre plus petit que 45°, car ils ne peuvent être égaux, et en conséquence il y aura une valeur de x égale à 45°, lorsque x varie d'une manière continue de α à β. La même chose aura lieu évidemment si x se trouve dans le voisinage de l'angle de polarisation. Il est superflu d'indiquer les limites, faciles à trouver, en dehors desquelles α doit être situé pour que x ne dépasse pas $\frac{\pi}{4}$.

Il s'ensuit qu'on ne peut jamais négliger le dernier terme de l'équation différentielle (l'équation citée au commencement de cette note) si la lumière est polarisée perpendiculairement au plan d'incidence et si l'angle de 45° est contenu entre les limites α et β, et en particulier si α est voisin de l'angle de polarisation. En conséquence, la formule (17), qui a été établie en négligeant le dernier terme, ne peut pas être appliquée dans ce cas."

La critique est sans doute fondée, en tant qu'elle démontre qu'on ne peut pas affirmer que $\frac{d\delta}{du}$ soit toujours une quantité petite, et que dans le cas en question l'équation (17) ne peut pas être déduite par la voie suivie dans le mémoire. Je crois pourtant qu'on peut établir que l'équation (17) est probablement admissible dans tous les cas, par un procédé un peu différent, en supposant que les quantités $\frac{d\delta}{dx}$ et $\frac{d\lambda}{dx}$ sont toujours petites.

On peut considérer comme évident que $\frac{d\rho}{dx}$ est toujours une quantité petite, même en comparaison d'une longueur d'onde, x variant entre les limites α et β, dont la différence est grande en général, tandis qu'on suppose

que la couche intermédiaire a une épaisseur qui ne surpasse pas une petite fraction de longueur d'onde.

La différence de marche de deux rayons réfléchis respectivement par la couche qui correspond à la valeur ρ et par celle qui correspond à $\rho - d\rho$ est $2 d\rho \cos x$. Si nous désignons par l la longueur d'onde dans le milieu où l'angle de réfraction est α, une longueur d'onde dans la couche précitée sera $l \frac{\sin x}{\sin \alpha}$ et la différence de phase des rayons en question

$$d\delta = \frac{2\pi \sin \alpha}{l \sin x} 2 d\rho \cos x,$$

ce qui donne

$$\frac{d\delta}{dx} = \frac{4\pi \sin \alpha}{l} \cot g\, x \frac{d\rho}{dx}.$$

$\frac{d\delta}{dx}$ est donc aussi une quantité très petite, excepté si x est nul (ou à peu près nul), auquel cas la formule cesse d'être applicable.

On a donc dans le cas en question, où les vibrations sont situées dans le plan d'incidence,

$$u = \tfrac{1}{2} \log \sin 2x,$$
$$du = dx \cot 2x.$$

et en conséquence

$$\frac{d\delta}{du} = \frac{d\delta}{dx} \operatorname{tg} 2x,$$

par où l'on voit que $\frac{d\delta}{du}$ est aussi une quantité très petite pour toutes les valeurs de x qui ne se trouvent pas dans le voisinage de 45°.

La fonction $f(u)$ est déterminée par l'équation différentielle

$$\frac{d\left[e^{-\delta\sqrt{-1}}f'(u)\right]}{du} = e^{-\delta\sqrt{-1}}f(u)$$

u

$$-f'(u)e^{-\delta\sqrt{-1}}\frac{d\delta}{du}\sqrt{-1} + e^{-\delta\sqrt{-1}}f''(u) = e^{-\delta\sqrt{-1}}f(u).$$

Si la perte de phase n'existait pas, δ et ses dérivées eraient égales à zéro. On aurait donc, comme on l'a émontré dans le mémoire,

$$f(u) = \frac{e^{u-u_\beta} + e^{u_\beta-u}}{e^{u_\alpha-u_\beta} + e^{u_\beta-u_\alpha}}.$$

On peut donc considérer cette expression comme ne première approximation de l'intégrale de l'équation ifférentielle ci-dessus, et on peut prendre

$$f(u) = e^{\lambda\sqrt{-1}}\frac{e^{u-u_\beta} + e^{u_\beta-u}}{e^{u_\alpha-u_\beta} + e^{u_\beta-u_\alpha}},$$

u l'on peut avec une certaine probabilité supposer que ait une valeur qui diffère peu de zéro dans tout l'interalle de α à β et en conséquence que la première dérivée e λ par rapport à x ait elle-même une valeur peu ifférente de zéro.

En introduisant λ à la place de x dans l'équation ifférentielle, on aura

$$\frac{d^2\lambda}{du^2} + \frac{e^{u-u_\beta} - e^{u_\beta-u}}{e^{u-u_\beta} + e^{u_\beta-u}}\frac{d(2\lambda-\delta)}{du} + \frac{d\lambda}{du}\frac{d(\lambda-\delta)}{du}\sqrt{-1} = 0.$$

Après avoir été multipliée par $\left(e^{u-u_\beta} + e^{u_\beta-u}\right)^2$, cette quation prendra la forme

$$\frac{d\left(e^{u-u_\beta}+e^{u_\beta-u}\right)^2\frac{d\lambda}{du}}{du}-\left(e^{2(u-u_\beta)}-e^{2(u_\beta-u)}\right)\frac{d\delta}{du}$$
$$+\left(e^{u-u_\beta}+e^{u_\beta-u}\right)^2\frac{d\lambda}{du}\,\frac{d(\lambda-\delta)}{du}\sqrt{-1}=0.$$

On voit qu'on aura pour $u=u_\beta$

$$f'(u)=0\,,\quad \frac{d\lambda}{du}=0\,,$$

et, en vertu de l'équation différentielle,

$$\left(e^{u-u_\beta}+e^{u_\beta-u}\right)^2\frac{d\lambda}{du}-\int_{u_\beta}^{u}\left(e^{2(u-u_\beta)}-e^{2(u_\beta-u)}\right)\frac{d\delta}{du}\,du$$
$$+\int_{u_\beta}^{u}\left(e^{u-u_\beta}+e^{u_\beta-u}\right)^2\frac{d\lambda}{du}\,\frac{d(\lambda-\delta)}{du}\,du\sqrt{-1}=0.$$

Comme $\frac{d\lambda}{du}$ et $\frac{d\delta}{du}$ ont des valeurs petites pour toutes les valeurs de x différentes de 45°, on peut négliger la dernière intégrale en comparaison des autres termes, si 45° n'est pas compris entre β et x. Si au contraire 45° est compris entre β et x, il peut se faire que $\frac{d\lambda}{du}$ devienne grand dans le voisinage de 45°, tandis que $\frac{d\delta}{du}$ s'approche de l'infini.

On ne peut donc pas dans ce cas, sans recherches ultérieures, négliger la partie de la dernière intégrale comprise entre les limites, qui correspondent à $x=45°-v_1$ et $x=45°+v_2$, v_1 et v_2 étant des quantités petites.

En introduisant x au lieu de u dans l'équation différentielle et en posant

$$\left(e^{u-u_\beta}+e^{u_\beta-u}\right)^2=\varphi(x),$$
$$e^{2(u-u_\beta)}-e^{2(u_\beta-u)}=\chi(x),$$

on aura, en vertu de $u=\frac{1}{2}\log\sin 2x$,

$$)\frac{d\lambda}{dx}\operatorname{tg}2x-\int_\beta^x\chi(x)\frac{d\delta}{dx}dx+\sqrt{-1}\int_\beta^x\varphi(x)\frac{d\lambda}{dx}\frac{d(\lambda-\delta)}{dx}\operatorname{tg}2x\,dx=0.$$

Nous supposerons à présent qu'on ait $\beta<x$, $x=45^\circ-v$, v étant une quantité petite. Comme les éléments de la dernière intégrale sont petits si x n'est pas voisin de 45°, on peut substituer $45^\circ-v_1$ au lieu de la limite inférieure β, v_1 étant une quantité petite. L'équation différentielle peut alors s'écrire

$$x)\frac{d\lambda}{dx}\operatorname{tg}2x-\int_\beta^x\chi(x)\frac{d\delta}{dx}dx-\sqrt{-1}\int_{v_1}^v\varphi(x)\frac{d\lambda}{dx}\frac{d(\lambda-\delta)}{dx}\cot 2v\,dv=0.$$

Mais, les limites de la dernière intégrale étant très rappochées, on peut supposer que, dans cette intégrale, $\varphi(x)$, $\frac{d\lambda}{dx}$, $\frac{d\delta}{dx}$ sont des constantes; on aura donc, en intégrant et en négligeant des quantités qui sont insignifiantes en comparaison des quantités conservées

$$\varphi(x)\frac{d\lambda}{dx}\operatorname{tg}2x-\int_\beta^x\chi(x)\frac{d\delta}{dx}dx-\sqrt{-1}\,\tfrac{1}{2}\varphi(x)\frac{d\lambda}{dx}\frac{d(\lambda-\delta)}{dx}\log\frac{v}{v_1}=0.$$

Mais, $\operatorname{tg}2x$ étant sensiblement égal à $\frac{1}{2v}$ pour $x=45^\circ-v$, le dernier terme de cette équation est négligeable par rapport au premier, et l'on aura, quand x s'approche de 45°,

$$\lim_{x=45^\circ}\frac{d\lambda}{dx}\operatorname{tg}2x=\frac{1}{\varphi(x)}\int_\beta^x\chi(x)\frac{d\delta}{dx}dx.$$

Ceci prouve que tous les éléments de

$$\int_{u_\beta}^{u} \varphi(x) \frac{d\lambda}{du} \frac{d(\lambda-\delta)}{du} du$$

ont des valeurs petites, même si 45° est compris entre les limites β et χ, et on peut dans tous les cas négliger cette intégrale dans l'équation différentielle.

L'équation de Lorenz est donc bien fondée quand on suppose que $\frac{d\delta}{dx}$ et $\frac{d\lambda}{dx}$ sont des quantités petites.

NOTE 7. On a établi la formule en supposant que $\frac{d\delta}{du}$ et $\frac{d\lambda}{du}$ sont des quantités petites, et la formule trouvée démontre bien que ces suppositions ne sont pas incompatibles, mais ne peut pas démontrer que l'une est une conséquence de l'autre.

NOTE 8. On aura, en vertu de $u = u_\alpha$,

$$f(u) = 1, \quad \lambda = 0.$$

NOTE 9. On voit par les formules (16) et (17), combinées avec (18) et (19), de quelle manière la perte de phase produite par la réflexion varie en fonction de l'angle d'incidence.

Comme le coefficient de $\cos kt$ dans (16) est toujours positif et que tg Δ a toujours une petite valeur positive, on voit que la perte de phase de R est toujours un petit angle positif.

La différence des phases de R et R' est donc sensiblement déterminée par la perte de phase de R' produite par la réflexion. Mais la perte de phase de R' est déterminée par la valeur de tg Δ' jointe au signe du coefficient de $\cos kt$. Comme l'écart par rapport aux

formules de Fresnel s'observe en particulier au voisinage de l'angle de polarisation, on doit surtout rechercher comment la perte de phase varie dans ce voisinage.

On peut donner à l'expression de tg Δ' la forme suivante, comme le fait M. Mascart (Traité d'optique, t. II, p. 439),

$$\operatorname{tg} \Delta' = \frac{4\pi}{l(v_1-1)} \frac{(1+\operatorname{tg}^2 \alpha)\cos\alpha}{v_1-\operatorname{tg}^2\alpha}\left[(v_1-\sin^2\alpha)\int_1^{v_1}\rho\,dv - v_1\sin^2\alpha\int_1^{v_1}\rho\frac{dv}{v^2}\right]$$

(le facteur $\cos\alpha$ au numérateur est oublié aussi bien par Lorenz que par M. Mascart).

Le terme entre parenthèses sera égal à zéro pour une valeur de α, que nous appellerons γ, déterminée par

$$\sin^2\gamma = \frac{v_1\int_1^{v_1}\rho\,dv}{\int_1^{v_1}\rho\,dv + v_1^2\int_1^{v_1}\rho\frac{dv}{v^2}},$$

et l'on aura trois cas essentiellement différents selon que

$$\gamma \lesseqgtr p$$

où p désigne l'angle de polarisation. Le dernier cas comprend celui où γ est imaginaire.

Nous voyons que tg Δ' est toujours positif pour α assez petit et que le signe de tg Δ' change si α en variant passe par γ ou par p.

Dans le premier cas, tg Δ' sera donc positif pour $\alpha > p$ ou $\alpha + \beta > 90°$. Nous choisirons toujours Δ' dans le premier quadrant positif ou négatif; la perte de phase sera donc

$$\Delta' + 2p\pi \quad \text{pour} \quad \alpha + \beta > \frac{\pi}{2}.$$

Si α diminue, tg Δ' croîtra, et pour $\alpha = p$ deviendra infiniment grand, et Δ' sera égal à $2p\pi + \frac{\pi}{2}$. Si α passe par p, tg Δ' changera de signe en même temps que le coefficient de $\cos kt$, et par suite la perte de phase sera située dans le second quadrant, et, Δ' étant choisi dans le premier quadrant négatif, la perte sera égale à

$$\Delta' + \pi + 2p\pi \quad \text{pour} \quad \alpha < \beta + \frac{\pi}{2}.$$

C'est le cas des corps à réflexion négative.

Si au contraire $p > \gamma$, tg Δ' sera négatif pour $p < \alpha < \frac{\pi}{2}$, et la perte de phase sera située dans le premier quadrant négatif et sera égale à $\Delta' + 2p\pi$. Si α diminue, la valeur absolue de Δ' croîtra et deviendra égale à $\frac{\pi}{2}$ pour $\alpha = p$. α passant par p, tg Δ' et le coefficient de $\cos kt$ changeront de signe et la perte de phase sera située dans le troisième quadrant et sera égale à $\Delta' + \pi + 2p\pi$. C'est le cas des corps à réflexion positive.

Dans le dernier cas $\gamma = p$, tg Δ' aura toujours le même signe et par suite sera toujours positif. Si $\alpha = p$, tg Δ' aura la forme $\frac{0}{0}$, mais en déterminant la vraie valeur, on verra qu'elle sera très petite et positive. L'angle α variant et passant par p, le coefficient de $\cos kt$ changera de signe. La perte de phase sera donc située dans le premier quadrant positif pour $\alpha + \beta > 90°$, dans le troisième quadrant pour $\alpha + \beta < 90°$. C'est le cas des corps à réflexion neutre.

M. Mascart (Traité d'optique, p. 439) dit que, d'après la théorie de Lorenz, tous les corps ont la réflexion

positive pour un petit angle d'incidence, ce qui est contraire aux expériences. Mais comme la perte de phase ne peut être observée qu'au voisinage de l'angle de polarisation, cette objection contre la théorie de Lorenz n'est pas valable.

DÉTERMINATION

DE

LA DIRECTION DES VIBRATIONS DE L'ÉTHER LUMINEUX PAR LA RÉFLEXION ET PAR LA RÉFRACTION DE LA LUMIÈRE.

DÉTERMINATION DE LA DIRECTION DES VIBRATIONS DE L'ÉTHER LUMINEUX PAR LA RÉFLEXION ET PAR LA RÉFRACTION DE LA LUMIÈRE.

POGG. ANN. T. 114, P. 238—250.* * NOTE 1.

Le présent mémoire se rattache à deux autres, que j'ai publiés dans le tome 111 de ces Annales (les Ann. de Pogg.).* Après avoir déterminé dans le premier la * NOTE 2. direction des vibrations par la diffraction de la lumière, je m'attachai dans le second mémoire à infirmer l'importance qu'on a attribuée aux expériences de Jamin pour la solution de ce problème, en faisant voir qu'on pouvait expliquer ces expériences d'une manière simple qui laisse la question indécise.

On sait que l'expérience a prouvé l'exactitude des formules de Fresnel relatives à l'intensité, modifiées par la correction de Jamin. Dans des expériences que j'ai faites moi-même sur la déviation du plan de polarisation par la réfraction, la valeur observée ne s'est pas écartée de 12′ de la valeur calculée, même pour une déviation de 18°; je me suis convaincu ainsi que les écarts, s'il y en a, doivent du moins être très petits, ce qu'il suffit de constater pour le but du présent mémoire.

Le calcul des intensités des rayons réfléchi et réfracté a été fait si souvent, qu'il pourrait paraître inutile de le répéter, si l'on n'était pas, selon les hypothèses dont on est parti, parvenu à des résultats tellement contraires, qu'à présent la question est devenue tout à fait embrouillée. Pour trancher la question des vibrations de l'éther lumineux, j'ai donc évité toute hypothèse incertaine ou douteuse, comme l'égalité des pressions et des déplacements de part et d'autre de la surface de séparation, et j'ai choisi comme point de départ du calcul les lois générales du mouvement des corps élastiques.

Je prends pour plan des coordonnées yz un plan parallèle à la surface plane qui sépare les deux milieux, et je suppose en toute généralité que la densité et l'élasticité de l'éther soient des fonctions de x. Les équations différentielles formées dans cette hypothèse sont transformées de manière à pouvoir être intégrées en supposant plus tard que la densité et l'élasticité de l'éther ne soient variables qu'entre des valeurs de x très rapprochées ($x > 0$ et $x < \varepsilon$), mais qu'elles restent constantes en dehors de ces limites.

Soient ξ, η, ζ les composantes du mouvement suivant les trois axes; N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3, les forces de pression normales et tangentielles; ces forces élastiques seront, comme on sait, déterminées par les équations suivantes:

$$N_1 = \lambda\theta + 2\mu\frac{\partial\xi}{\partial x}, \qquad T_1 = \mu\left(\frac{\partial\eta}{\partial z} + \frac{\partial\zeta}{\partial y}\right),$$

$$N_2 = \lambda\theta + 2\mu\frac{\partial\eta}{\partial y}, \qquad T_2 = \mu\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x} + \frac{\partial\xi}{\partial z}\right),$$

$$N_3 = \lambda\theta + 2\mu\frac{\partial\zeta}{\partial z}, \qquad T_3 = \mu\left(\frac{\partial\xi}{\partial y} + \frac{\partial\eta}{\partial x}\right),$$

où λ et μ représentent les coefficients d'élasticité, fonctions de x, et où

$$\theta = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}.$$

Si l'on désigne par t le temps et par ρ la densité variable, les lois du mouvement seront exprimées par les équations différentielles

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial T_3}{\partial y} + \frac{\partial T_2}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial T_3}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} + \frac{\partial T_1}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial x} + \frac{\partial T_1}{\partial y} + \frac{\partial N_3}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}. \tag{3}$$

On satisfait à ces dernières équations par des intégrales de la forme

$$f = \varphi(x)\, e^{(kt-nz)\sqrt{-1}}$$

et l'on n'a pas besoin de chercher des intégrales d'une forme plus générale si l'on prend le plan des xz pour plan d'incidence de la lumière, ou si l'on suppose que le plan de l'onde est parallèle à l'axe des y. Nous aurons par suite

$$\frac{\partial f}{\partial t} = k\sqrt{-1}\,f, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -n\sqrt{-1}\,f, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

En décomposant les vibrations en composantes parallèles et perpendiculaires à l'axe des y, on peut encore discuter séparément la valeur de chaque composante.

Si les vibrations sont parallèles à l'axe des y, on aura $\xi = 0$ et $\zeta = 0$ et en vertu de l'équation (2)

* NOTE 3.

$$\frac{\partial\left(\mu\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial\delta}{\partial x}\right)^2\eta = 0^* \qquad (4)$$

en posant

* NOTE 4.

$$\frac{\partial\delta}{\partial x}=\sqrt{\frac{k^2\rho}{\mu}-n^2}.^*$$

Cette équation, qui est une équation différentielle ordinaire, linéaire et du second ordre, peut être mise sous une autre forme par l'introduction d'une nouvelle fonction U et d'une nouvelle variable u. A cet effet posons

$$\eta = e^{u-\delta\sqrt{-1}}\left[U-\frac{dU}{du}\right], \qquad (5)$$

U satisfaisant à l'équation

$$\frac{d}{du}\left[e^{-2\delta\sqrt{-1}}\frac{dU}{du}\right] = e^{-2\delta\sqrt{-1}}U. \qquad (6)$$

Si nous cherchons les dérivées de η, nous aurons

$$\frac{\partial\eta}{\partial x} = -\sqrt{-1}\,\frac{\partial\delta}{\partial x}e^{u-\delta\sqrt{-1}}\left[U+\frac{dU}{du}\right],$$

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} = \left[2\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial\log\frac{\partial\delta}{\partial x}}{\partial x}\right]\frac{\partial\eta}{\partial x}-\left(\frac{\partial\delta}{\partial x}\right)^2\eta,$$

et en substituant ces valeurs dans l'équation (4) nous obtiendrons

* NOTE 5.

$$2\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial\log\frac{\partial\delta}{\partial x}}{\partial x}+\frac{\partial\log\mu}{\partial x} = 0.^*$$

La variable u sera déterminée par l'intégration de cette équation qui introduit la constante c, et l'on aura

$$ce^{-u} = \sqrt{\mu\frac{\partial\delta}{\partial x}}. \qquad (7)$$

Quant à la constante arbitraire de l'intégrale, on peut provisoirement la déterminer à volonté en posant

$$U = 1 \quad \text{pour} \quad u = u_\alpha$$

et

$$\frac{dU}{du} = 0 \quad \text{pour} \quad u = u_\beta,$$

et l'intégrale sera exprimée par la série suivante

$$U = 1 - \int_{u_\alpha}^{u} du_1 \int_{u_1}^{u_\beta} du_2 e^{2(-\delta_2+\delta_1)\sqrt{-1}}$$

$$+ \int_{u_\alpha}^{u} du_1 \int_{u_1}^{u_\beta} du_2 \int_{u_\alpha}^{u_2} du_3 \int_{u_3}^{u_\beta} du_4 e^{2(-\delta_4+\delta_3-\delta_2+\delta_1)\sqrt{-1}} - \ldots \quad (S)^*$$

* NOTE 6.

où δ_1, δ_2, ... sont des fonctions formées avec les variables u_1, u_2 comme δ l'est avec u.

Nous supposerons à présent que μ, ρ et par conséquent aussi u et $\frac{\partial \delta}{\partial x}$ ne soient variables qu'entre des limites très rapprochées ($x > 0$ et $x < \varepsilon$), mais restent constants en dehors de ces limites. Dans le premier milieu ($x < 0$) ces valeurs seront désignées par μ_1, ρ_1, u_α et l_1 et dans le second par μ_2, ρ_2, u_β et l_2.

Étant donné

$$\frac{\partial \delta}{\partial x} = l_1, \quad \text{c'est-à-dire } \delta = l_1 x \text{ pour } x < 0,$$

et

$$\frac{\partial \delta}{\partial x} = l_2, \quad \text{c'est-à-dire } \delta = l_2 x \text{ pour } x > \varepsilon,$$

δ variera entre ces limites d'une manière continue de zéro à $l_2 \varepsilon$, et pourra par suite être regardé dans tout ce qui suit comme ayant une très petite valeur. De plus

les différentielles du_1, du_2, ... dans la série (8) et tous les éléments des intégrales s'évanouiront en dehors des limites, et pour cette raison δ_1, δ_2, ... seront ici très
* NOTE 7. petits.* Dans la série

$$\frac{dU}{du} = -e^{2\delta\sqrt{-1}}\left(\int_u^{u_\beta} du_1 e^{2\delta_1\sqrt{-1}}\right.$$

$$\left. -\int_u^{u_\beta} du_1 \int_{u_\alpha}^{u_1} du_2 \int_{u_2}^{u_\beta} du_3 e^{2(\delta_3+\delta_2-\delta_1)\sqrt{-1}} \cdots \right) \tag{9}$$

$e^{2\delta\sqrt{-1}}$ entre au contraire comme facteur, et on ne peut pas négliger ce facteur.

Les séries peuvent aisément être sommées, si l'on fait ε égal à zéro: on obtiendra

* NOTE 8.

$$U = \frac{e^{u-u_\beta} + e^{u_\beta-u}}{e^{u_\alpha-u_\beta} + e^{u_\beta-u_\alpha}}, \tag{10}$$ *

$$\frac{dU}{du} = e^{2\delta\sqrt{-1}} \frac{e^{u-u_\beta} - e^{u_\beta-u}}{e^{u_\alpha-u_\beta} + e^{u_\beta-u_\alpha}}. \tag{11}$$

Si l'on substitue ces deux expressions dans l'équation (5) et qu'on remplace u et δ par leurs valeurs trouvées ci-dessus, on aura:

Pour x négatif

* NOTE 9.

$$\eta = \frac{c}{\sqrt{\mu_1 l_1}}\left[e^{-l_1x\sqrt{-1}} + \frac{\mu_2 l_2 - \mu_1 l_1}{\mu_2 l_2 + \mu_1 l_1} e^{l_1x\sqrt{-1}}\right],*$$

et pour x positif

$$\eta = \frac{c}{\sqrt{\mu_1 l_1}} \cdot \frac{2\mu_1 l_1}{\mu_2 l_2 + \mu_1 l_1} e^{-l_2x\sqrt{-1}}.$$

Au moyen de ces valeurs, il est facile de former l'intégrale générale de l'équation (4), savoir:

$$\left.\begin{aligned} \eta &= \eta_1 \left[\cos(c - l_1 x) - \frac{\mu_2 l_2 - \mu_1 l_1}{\mu_2 l_2 + \mu_1 l_1} \cos(c + l_1 x)\right], & x < 0 \\ \eta &= \eta_1 \frac{2\mu_1 l_1}{\mu_2 l_2 + \mu_1 l_1} \cos(c - l_2 x), & x > 0 \end{aligned}\right\} (12)^*$$ * NOTE 10.

Dans le cas en question on doit poser $c = kt - nz$.* * NOTE 11. On voit donc que l'onde plane incidente donne naissance à une onde plane réfléchie et à une onde plane réfractée.* * NOTE 12.

En désignant l'angle d'incidence par α, l'angle de réfraction par β, on aura

$$\sin\alpha = \frac{n}{\sqrt{l_1^2 + n^2}}, \quad \sin\beta = \frac{n}{\sqrt{l_2^2 + n^2}},$$

et si nous introduisons ces nouvelles quantités dans l'équation (12) en remplaçant l_1 et l_2 par leurs valeurs $n \cot\alpha$ et $n \cot\beta$, nous obtiendrons les expressions suivantes pour les rayons réfléchi et réfracté:

$$\eta_1 \frac{\mu_1 \operatorname{tg}\beta - \mu_2 \operatorname{tg}\alpha}{\mu_1 \operatorname{tg}\beta + \mu_2 \operatorname{tg}\alpha} \quad \text{et} \quad \eta_1 \frac{2\mu_1 \operatorname{tg}\beta}{\mu_1 \operatorname{tg}\beta + \mu_2 \operatorname{tg}\alpha},$$

où η_1 est l'amplitude du rayon incident.

Si nous supposons, comme l'a fait Fresnel, que le coefficient d'élasticité soit constant, nous parviendrons aux formules qu'il a données pour la lumière polarisée dans le plan d'incidence. Si nous supposons au contraire que la densité soit constante $\left(\frac{\mu_1}{\sin^2\alpha} = \frac{\mu_2}{\sin^2\beta}\right)$ et si nous mesurons l'intensité par le carré de l'amplitude multiplié par la densité, nous trouverons pour les deux rayons les intensités que Fresnel a trouvées pour les rayons

polarisés perpendiculairement au plan d'incidence. Le résultat est donc dans les deux cas d'accord avec les expériences, que l'on fasse l'une ou l'autre hypothèse.

* NOTE 13. De plus on trouve facilement que les déplacements η* et les pressions T_3 sont les mêmes des deux côtés du plan de séparation (plan des yz).

On pourrait encore arriver au résultat par une méthode directe qui sera appliquée dans ce qui suit, et de ce résultat découleraient aussi les valeurs des déplacements. Si j'ai appliqué la première méthode, c'est qu'elle donne plus de facilités pour faire un pas de plus, à savoir pour traiter le cas où l'indice de réfraction ne varie que par degrés insensibles, c'est-à-dire où ε a une valeur très petite mais n'est pas identiquement égal à zéro, car dans ce cas il faut seulement appliquer les séries (8) et (9) ou l'équation (6). Mais comme la série (9) n'a au point de vue physique d'importance que pour le rayon réfléchi et que je l'ai déjà étudiée en détail dans un mémoire antérieur (Pogg. Ann., t. 111, p. 466; p. 38 de la présente édition), je me borne ici à renvoyer à ce mémoire. En faisant la comparaison, on doit toutefois remarquer

* NOTE 14. que δ a une valeur double* dans le mémoire cité et que les intégrations multiples qui s'y trouvent faites sont exécutées dans l'ordre inverse, ce qui d'ailleurs n'affecte pas la forme de la série pour le rayon réfléchi.

Si les vibrations de l'éther lumineux sont perpendiculaires à l'axe des y, c'est-à-dire si elles sont situées dans le plan d'incidence, les équations du mouvement (1) et (3) deviendront

$$\frac{d}{dx}\left[\lambda\theta+2\mu\frac{d\xi}{dx}\right]-\mu V\cdot 1\mu\frac{d\zeta}{dx}+\mu\left(\frac{d\delta}{dx}\right)^{2}\xi=0, \quad (13$$

$$\frac{d}{dx}\mu\left[\frac{d\zeta}{dx}-n\sqrt{-1}\,\xi\right]-n\sqrt{-1}\,\lambda\frac{d\xi}{dx}+(\lambda+2\mu)\left(\frac{d\delta'}{dx}\right)^2\zeta=0, \quad (14)$$

où l'on pose

$$\sqrt{\frac{k^2\rho}{\mu}-n^2}=\frac{d\delta}{dx} \text{ et } \sqrt{\frac{k^2\rho}{\lambda+2\mu}-n^2}=\frac{d\delta'}{dx}.$$

Nous introduisons à présent quatre fonctions nouvelles déterminées par les équations suivantes:

$$\xi=n(\varphi-\psi)+\frac{d\delta'}{dx}(\varphi'+\psi'), \quad (15)^*$$ * NOTE 15.

$$\frac{d\xi}{dx}=-\sqrt{-1}\left[n\frac{d\delta}{dx}(\varphi+\psi)+\left(\frac{d\delta'}{dx}\right)^2(\varphi'-\psi')\right], \quad (16)$$

$$\zeta=-\frac{d\delta}{dx}(\varphi+\psi)+n(\varphi'-\psi'), \quad (17)$$

$$\frac{d\zeta}{dx}=-\sqrt{-1}\left[-\left(\frac{d\delta}{dx}\right)^2(\varphi-\psi)+n\frac{d\delta'}{dx}(\varphi'+\psi')\right]. \quad (18)$$

Au moyen de ces quatre relations on peut former deux équations différentielles, qui jointes aux équations (13) et (14), où ξ, ... sont exprimés par les nouvelles fonctions, donneront quatre équations différentielles permettant de déterminer ces nouvelles fonctions.

Pour faciliter les calculs ultérieurs, nous introduisons le symbole d_1, qui a une signification un peu différente, suivant qu'il s'applique aux différentes fonctions φ, ψ, φ', ψ'. Il est défini par les équations suivantes:

$$\frac{d_1(\varphi k)}{dx}=e^{-\delta\sqrt{-1}}\frac{d\left(\varphi e^{\delta\sqrt{-1}}k\right)}{dx}, \quad \frac{d_1(\psi k)}{dx}=e^{\delta\sqrt{-1}}\frac{d\left(\psi e^{-\delta\sqrt{-1}}k\right)}{dx},$$

$$\frac{d_1(\varphi' k)}{dx}=e^{-\delta'\sqrt{-1}}\frac{d\left(\varphi' e^{\delta'\sqrt{-1}}k\right)}{dx}, \quad \frac{d_1(\psi' k)}{dx}=e^{\delta'\sqrt{-1}}\frac{d\left(\psi' e^{-\delta'\sqrt{-1}}k\right)}{dx},$$

k désignant une fonction arbitraire. De ces équations on peut déduire

$$\frac{d(\varphi k)}{dx} = \frac{d_1(\varphi k)}{dx} - \sqrt{-1}\,\frac{d\delta}{dx}\varphi k, \quad \frac{d(\psi k)}{dx} = \frac{d_1(\psi k)}{dx} + \sqrt{-1}\,\frac{d\delta}{dx}\psi k,$$

etc.

Si nous formons ainsi, au moyen de l'équation (15), l'expression de $\frac{d\xi}{dx}$, nous obtiendrons, en vertu de l'équation (16),

$$\frac{d_1(n\varphi)}{dx} - \frac{d_1(n\psi)}{dx} + \frac{d_1\left(\frac{d\delta'}{dx}\varphi'\right)}{dx} + \frac{d_1\left(\frac{d\delta'}{dx}\psi'\right)}{dx} = 0$$

ou plus simplement

* NOTE 16.

$$\frac{d_1\xi}{dx} = 0. \qquad (19)^*$$

De la même manière on obtiendra, au moyen des deux équations suivantes,

$$\frac{d_1\zeta}{dx} = 0. \qquad (20)$$

Nous aurons de plus

$$\frac{d}{dx}\left[\lambda\theta + 2\mu\frac{d\xi}{dx}\right] = \frac{d_1}{dx}\left[\lambda\theta + 2\mu\frac{d\xi}{dx}\right] - 2n\mu\left(\frac{d\delta}{dx}\right)^2(\varphi - \psi)$$
$$- \left(\frac{d\delta'}{dx}\right)\left[\lambda n^2 + (\lambda + 2\mu)\left(\frac{d\delta'}{dx}\right)^2\right](\varphi' + \psi').$$

En tenant compte des valeurs de $\frac{d\delta}{dx}$ et $\frac{d\delta'}{dx}$, on trouvera

$$\lambda n^2 + (\lambda + 2\mu)\left(\frac{d\delta'}{dx}\right)^2 = \mu\left(\frac{d\delta}{dx}\right)^2 - n^2\mu,$$

ce qui montre que les deux derniers termes de l'équation sont égaux à

$$-\mu\left(\frac{d\delta}{dx}\right)^2\xi + n\sqrt{-1}\,\mu\frac{d\zeta}{dx}.$$

Il résulte donc de l'equation différentielle (13) que

$$\frac{d_1}{dx}\left[\lambda\theta + 2\mu\frac{d\xi}{dx}\right] = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{d_1 N_1}{dx} = 0. \tag{21}$$

De même l'équation (14) donnera

$$\frac{d_1}{dx}\mu\left[\frac{d\zeta}{dx} - n\sqrt{-1}\,\xi\right] = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{d_1 T_2}{dx} = 0. \tag{22}$$

Nous supposons, comme nous l'avons déjà fait plus haut, que λ, μ, ρ et par conséquent aussi $\frac{d\delta}{dx}$ et $\frac{d\delta'}{dx}$ ne sont variables qu'entre des limites très rapprochées ($x > 0$ et $x < \varepsilon$), mais qu'ils restent constants en dehors de ces limites.

Si nous posons

$$\begin{aligned} \delta &= l_1 x, \quad \delta' = l'_1 x \quad \text{pour} \quad x < 0, \\ \delta &= l_2 x, \quad \delta' = l'_2 x \quad \text{pour} \quad x > \varepsilon, \end{aligned}$$

δ et δ' varieront entre ces limites d'une manière continue de zéro à $l_2\varepsilon$ et $l'_2\varepsilon$, et pourront par suite être regardés comme ayant des valeurs très petites.

En développant par exemple le facteur $e^{-\delta\sqrt{-1}}$ dans l'équation

$$\frac{d_1(\varphi k)}{dx}dx = e^{-\delta\sqrt{-1}}\,\frac{d\left(\varphi e^{\delta\sqrt{-1}}k\right)}{dx}dx$$

en série suivant les puissances de δ et en intégrant de $x = 0$ à $x = \varepsilon$, le premier terme sera très grand en comparaison de tous les suivants, et pour cette raison les derniers peuvent être négligés, si l'intégrale ne devient pas infinie. De la même manière nous concluons de l'équation (19) ou $\frac{d_1\xi}{dx} = 0$, en intégrant entre les mêmes

limites,

$$[\xi]^{x=0} = [\xi]^{x=\varepsilon} \tag{23}$$

et des équations suivantes

$$[\zeta]^{x=0} = [\zeta]^{x=\varepsilon}, \tag{24}$$

$$[N_1]^{x=0} = [N_1]^{x=\varepsilon}, \tag{25}$$

* NOTE 17.

$$[T_2]^{x=0} = [T_2]^{x=\varepsilon}. \tag{26}$$ *

On voit donc que les composantes des déplacements et les forces de pression sont les mêmes des deux côtés de la surface de séparation.

Des équations (15) et (17) on déduit facilement que φ et ψ correspondent aux vibrations transversales, φ' et ψ' aux vibrations longitudinales, et que ψ et ψ' se rapportent à l'onde réfléchie, si φ et φ' se rapportent à l'onde incidente.* Désignons les valeurs de ces fonctions à la surface de séparation par les indices 1 et 2 pour le premier et pour le second milieu, et faisons ψ_2 et ψ'_2 égaux à zéro: le rayon réfléchi n'existant que dans le premier milieu, les quatre dernières équations deviendront, après une légère transformation de la troisième, où l'on remplace $(\lambda+2\mu)\left[n^2+\left(\frac{d\delta'}{dx}\right)^2\right]$ par $\mu\left[n^2+\left(\frac{d\delta}{dx}\right)^2\right]$:

* NOTE 18.

$$n(\varphi_1-\psi_1)+l'_1(\varphi'_1+\psi'_1) = n\varphi_2+l'_2\varphi'_2, \tag{27}$$

$$-l_1(\varphi_1+\psi_1)+n(\varphi'_1-\psi'_1) = -l_2\varphi_2+n\varphi'_2, \tag{28}$$

$$2nl_1(\varphi_1+\psi_1)+(l_1^2-n^2)(\varphi'_1-\psi'_1) = \frac{\mu_2}{\mu_1}[2nl_2\varphi_2+(l_2^2-n^2)\varphi'_2], \tag{29}$$

$$-(l_1^2-n^2)(\varphi_1-\psi_1)+2nl'_1(\varphi'_1+\psi'_1) = \frac{\mu_2}{\mu_1}[-(l_2^2-n^2)\varphi_2+2nl'_2\varphi'_2]. \tag{30}$$

Pour le but que nous avons en vue, nous pourrons nous borner à résoudre ces équations dans un cas particulier. Nous supposons que les deux milieux diffèrent infiniment peu et que les rayons incidents ne contiennent que des vibrations transversales. On aura par conséquent $\varphi_1' = 0$, et ψ_1, ψ_1', $\varphi_2 - \varphi_1$, φ_2' auront des valeurs infiniment petites. De plus nous remplacerons l_1, l_1', μ_1 par l, l', μ, et l_2, l_2', μ_2 par $l + dl$, $l' + dl'$, $\mu + d\mu$. Les quantités ψ_1' et φ_2' peuvent très facilement être éliminées, et l'on aura alors les deux équations résultantes

$$\varphi_2 = \varphi_1 \left[1 - \frac{n^2 + 3l^2}{n^2 + l^2} \frac{dl}{2l} - \frac{d\mu}{2\mu}\right],$$

$$\psi_1 = \varphi_1 \left[\frac{n^2 - l^2}{n^2 + l^2} \frac{dl}{2l} + \frac{3n^2 - l^2}{n^2 + l^2} \frac{d\mu}{2\mu}\right].$$

De ces deux expressions il est facile de déduire les valeurs des amplitudes des ondes incidente, réfléchie et réfractée, car leurs rapports seront

$$\varphi_1 : \psi_1 : \left(1 + \frac{l\,dl}{n^2 + l^2}\right) \varphi_2 \, .^*$$ * NOTE 19.

En désignant, comme nous l'avons fait plus haut, l'angle d'incidence par α et en posant

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{l}{n}, \quad -\frac{d\alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{dl}{n},$$

on verra que les rapports des amplitudes auront les valeurs suivantes:

$$1 : \frac{d\alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha} + (3 \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) \frac{d\mu}{2\mu} : 1 + \frac{d\alpha}{\sin 2\alpha} - \frac{d\mu}{2\mu}. \quad (31)$$

Les formules de Fresnel relatives à l'intensité de la lumière, qui doivent encore être admissibles dans le cas de deux milieux réfringents infiniment peu différents, ne sont d'accord avec ce résultat que si μ est constant, mais elles ne le sont plus dans le cas contraire.

Au moyen des formules (31) nous pouvons, comme je l'ai montré déjà auparavant (Pogg. Ann., t. 111, p. 460; cette édition, p. 31), calculer les amplitudes des rayons réfléchis et réfractés pour des milieux dont l'indice diffère d'une quantité finie, si l'on ne tient pas compte des vibrations longitudinales.

Pour se faire une idée correcte de ces dernières ondes, on doit remarquer que l' devient imaginaire pour
* NOTE 20. $\sin^2\alpha > \frac{\mu}{\lambda + 2\mu}$ *, et par conséquent au moins si l'angle d'incidence surpasse 45° et vraisemblablement pour des angles d'incidence beaucoup plus petits. Les ondes s'étendent dans ce cas à la surface de séparation comme les ondes à la surface d'un fluide et décroissent très vite en même temps que leur distance à cette surface devient plus grande. Ces ondes longitudinales ou, comme je les appellerai plutôt, ces ondes superficielles, donnent de nouveau naissance à des vibrations transversales de la même espèce que les vibrations originelles; si l'on tient compte de celles-ci ou si l'on fait tout de suite l'hypothèse d'une différence finie entre les deux milieux, les résultats ne concordent plus avec l'expérience. Il faut donc nécessairement supposer que les ondes superficielles ne sont pas capables, pour une raison quelconque, de donner de nouveau naissance aux vibrations transversales de l'espèce primitive.

On a, comme on sait, toujours admis l'existence d'une absorption, que l'on a cherché à définir avec plus de précision par un coefficient d'absorption. Mais tout calcul fait avec un tel coefficient implique une théorie des corps imparfaitement élastiques, et nous avons encore bien du chemin à faire avant d'arriver à fonder une telle théorie. Pour cette raison on peut aussi obtenir un résultat quelconque au moyen d'un tel coefficient, le résultat ne dépendant que de la manière dont on a introduit ce coefficient et des lois d'après lesquelles on a calculé les forces de pression.

Avec un tel point de départ on ne peut faire avec sûreté aucun pas en avant. Aussi me suis-je abstenu d'aborder toutes ces difficultés; je n'ai supposé ni absorption ni défaut d'élasticité de l'éther; les vibrations longitudinales infiniment petites se forment en réalité par le passage de la lumière à travers les couches successives, mais j'ai supposé qu'il existe une raison pour laquelle ces vibrations longitudinales ne sont pas en état de reproduire les vibrations transversales de l'espèce primitive. Peut-être doit-on en chercher la cause dans ce fait que la surface de séparation n'est pas absolument plane et que par conséquent les ondes superficielles sont réfléchies plusieurs fois et doivent perdre par là leur caractère primitif.

Le résultat obtenu exclut tout à fait la possibilité que la densité de l'éther soit constante. Nous pouvons donc en conclure que le coefficient d'élasticité (nous ne savons absolument rien du coefficient de compressibilité

λ proprement dit) est le même pour tous les corp transparents et non cristallisés et pour l'espace vid Il s'ensuit de plus *que les vibrations de l'éther lum neux sont perpendiculaires au plan de polarisation.*

Copenhague, le 28 juin 1861.

NOTES.

NOTE 1. Une critique du mémoire se trouve dans les „Fortschritte der Physik", t. 17, p. 225.

NOTE 2. Le premier et le second mémoire de la présente édition.

NOTE 3. Dans ce qui suit, on suppose toujours que les composantes ξ, η, ζ sont des fonctions de la même forme que f.

NOTE 4. Si l'on suppose que ρ et μ soient des constantes, on aura

$$\eta = c_1 \cos\left(c - \frac{d\delta}{dx} x\right),$$

c et c_1 étant indépendants de x; η sera alors une fonction périodique de x.

C'est pour cette raison qu'on a adopté la notation

$$\frac{d\delta}{dx} = \sqrt{\frac{k\rho}{\mu} - n^2},$$

qui sans cela serait inintelligible.

On comprend l'introduction de la transformation qui suit dans le mémoire en comparant les formules (5) et (6) avec les formules (14) et (15) du mémoire de Lorenz „Sur la théorie de la lumière", (p. 98 de la présente édition ou Pogg. Ann., t. 118, p. 121) et avec celles du

mémoire „Sur la réflexion de la lumière à la surface de séparation de deux milieux transparents et isotropes“, p. 38 (Pogg. Ann., t. 111, p. 466).

NOTE 5. On obtiendra directement

$$\frac{d\eta}{dx}\left(2\frac{du}{dx}+\frac{d\log\frac{d\delta}{dx}}{dx}+\frac{d\log\mu}{dx}\right)=0;$$

mais en supposant que η ne soit pas indépendant de x, on rejette l'équation $\frac{d\eta}{dx}=0$.

NOTE 6. Il suit de l'équation (6) que

$$\frac{dU}{du}=e^{2\delta\sqrt{-1}}\int_{u_\beta}^{u}e^{-2\delta\sqrt{-1}}U\,du,$$

$$U=1+\int_{u_\alpha}^{u}du_1\int_{u_\beta}^{u_1}e^{2(\delta_1-\delta_2)\sqrt{-1}}U\,du_2,$$

et on aura la formule du mémoire en introduisant sous le second signe d'intégration la valeur de U exprimée par l'intégrale double et en continuant de cette manière.

Pour faire usage de la série ainsi trouvée, il est pourtant nécessaire de démontrer sa convergence, ce qu'on ne peut pas faire en général, la fonction δ étant inconnue.

NOTE 7. Tous les éléments qui ne sont pas compris entre $u=u_\alpha$ et $u=u_\beta$ s'évanouissant, δ sera très petit, puisqu'il varie seulement de 0 à εl_2.

NOTE 8. On obtiendra la formule (10) en faisant $\delta=0$ dans l'équation (6) et en intégrant.

On obtient la formule (11) de la manière suivante. En vertu de l'équation (6), on aura

$$\frac{dU}{du} = e^{2\delta\sqrt{-1}} \int_{u_\beta}^{u} U du,$$

et en substituant la valeur de U donnée par (10), on tombe sur la formule (11).

NOTE 9. $\frac{d\delta}{dx}$ étant, d'après notre hypothèse, constant en dehors des limites 0 et ε, on aura en vertu de l'équation (7)

$$e^{-u_\beta} = \frac{1}{c}\sqrt{\mu_2 l_2}, \quad e^{-u_\alpha} = \frac{1}{c}\sqrt{\mu_1 l_1}.$$

NOTE 10. On obtient les formules (12) en mettant dans les expressions trouvées immédiatement auparavant $\eta_1 e^{+c\sqrt{-1}}$ à la place de $\frac{c}{\sqrt{\mu_1 l_1}}$ et en prenant les parties réelles.

NOTE 11. D'après notre hypothèse, η aura la forme

$$f = \varphi(x)\, e^{(kt-nz)\sqrt{-1}}$$

(voir note 3) ou du moins sera la partie réelle d'une telle fonction.

NOTE 12. On suppose que l'onde incidente donnée ait l'amplitude η_1 et que celle-ci se divise en deux ondes, dont les amplitudes sont

$$\eta_1 \frac{\mu_2 l_2 - \mu_1 l_1}{\mu_2 l_2 + \mu_1 l_1}$$

et

$$\eta_1 \frac{2\mu_1 l_1}{\ldots}$$

dont la première correspond à l'onde réfléchie et la seconde à l'onde réfractée.

NOTE 13. On obtiendra ces résultats en faisant $x = 0$ dans les équations (12) et en remarquant qu'en vertu des mêmes équations, $\mu \frac{d\eta}{dx}$ aura la même valeur des deux côtés du plan de séparation.

Voir la remarque faite dans les „Fortschritte der Physik", t. 17, p. 230.

NOTE 14. Voir le mémoire cité p. 39.

NOTE 15. Si l'on convient de prendre pour direction positive d'un rayon de lumière la direction de sa propagation et si les vibrations sont situées dans le plan d'incidence, on peut adopter la convention qu'une vibration transversale est positive si elle fait un angle de $+90°$ avec la direction positive du rayon, et qu'une vibration longitudinale est positive si le mouvement se fait dans la direction positive du rayon. De plus nous pouvons faire l'hypothèse que le rayon total est composé de quatre rayons, à savoir: un rayon transmis à vibrations transversales; un rayon transmis à vibrations longitudinales; un rayon réfléchi à vibrations transversales, et un rayon réfléchi à vibrations longitudinales. Nous supposons de plus que le plan d'incidence est le plan des xz, que le plan des yz est le plan réfringent, et que les rayons à vibrations transversales et à vibrations longitudinales ont le même indice de réfraction et le même nombre de vibrations par seconde.

Soien α et α' les angles d'incidence des rayons à vibrations transversales et à vibrations longitudinales et soient τ, λ, τ', λ' les amplitudes des quatre rayons; on

aura, en désignant par ξ et ζ les composantes du rayon total,

$$\xi = -(\tau+\tau')\sin\alpha+(\lambda-\lambda')\cos\alpha',$$
$$\zeta = (\tau-\tau')\cos\alpha+(\lambda+\lambda')\sin\alpha'.$$

Si les ondes sont planes et si le mouvement s'est propagé dans un temps dt avec une vitesse ω, on aura pour le rayon à vibrations transversales

$$\omega\, dt = \cos\alpha\, dx\,, \quad \omega\, dt = \sin\alpha\, dz\,,$$

dx et dz étant les parties des axes des x et des z interceptées entre les deux positions du plan de l'onde. Mais dire que le mouvement s'est propagé d'un point à un autre, c'est dire que l'état du mouvement est actuellement au second point tel qu'il était auparavant au premier. Or, d'après l'hypothèse faite dans le mémoire (voir note 3), les composantes des vibrations sont de la forme

$$\varphi(x)\, e^{(kt-nz)\sqrt{-1}}$$

on bien de la forme

$$\varphi(x)\, e^{(kt-\delta-nz)\sqrt{-1}},$$

où δ représente la variation de phase que subit la vibration quand x varie. La phase ne variant pas quand l'onde se meut d'une position à une autre, on doit avoir

$$k\, dt - \frac{d\delta}{dx}\, dx = 0\,, \quad k\, dt - n\, dz = 0$$

et par suite

$$k\cos\alpha = \omega\,\frac{d\delta}{dx}\,, \quad k\sin\alpha = \omega n\,.$$

De la même manière on aura pour le rayon à vibrations longitudinales

$$k\cos\alpha' = \omega'\,\frac{d\delta'}{dx}\,, \quad k\sin\alpha' = \omega' n\,.$$

On aura donc

$$\xi = \frac{1}{k}\left[-\omega n(\tau+\tau') + \omega'\frac{d\delta'}{dx}(\lambda-\lambda')\right],$$

$$\eta = \frac{1}{k}\left[\omega\frac{d\delta}{dx}(\tau-\tau') + \omega' n(\lambda+\lambda')\right].$$

Ces équations sont identiques aux équations (15) et (17), si l'on pose

$$-\frac{\omega}{k}\tau = \varphi, \quad \frac{\omega}{k}\tau' = \psi, \quad \frac{\omega'}{k}\lambda = \varphi', \quad -\frac{\omega'}{k}\lambda' = \psi',$$

par où l'on voit que les fonctions φ, ψ, φ', ψ' sont proportionnelles aux valeurs numériques des amplitudes des quatre rayons (voir p. 99 ou Pogg. Ann., t. 118, p. 121).

En supposant que φ et φ' aient les formes

$$\varphi = Ce^{\left(kt-nz-\frac{d\delta}{dx}x\right)\sqrt{-1}},$$

$$\varphi' = C'e^{\left(kt-nz-\frac{d\delta'}{dx}x\right)\sqrt{-1}},$$

où C, C', $\frac{d\delta}{dx}$, $\frac{d\delta'}{dx}$ sont des constantes, et que ψ et ψ' aient les formes analogues

$$\psi = C_1e^{\left(kt-nz+\frac{d\delta}{dx}x\right)\sqrt{-1}},$$

$$\psi' = C'_1e^{\left(kt-nz+\frac{d\delta'}{dx}x\right)\sqrt{-1}},$$

on obtiendrait les équations (16) et (18) en différentiant (15) et (17).

C'est pour cette raison qu'on a introduit les quatre fonctions φ, ψ, φ', ψ'.

NOTE **16**. On désigne par $\frac{d_1\xi}{dx}$ l'opération $\frac{d_1}{dx}$ appliquée aux différents termes de ξ.

NOTE 17. Le raisonnement de Lorenz est ici tout à fait faux, comme je vais le montrer. Car on a par exemple déduit l'équation

$$[\xi]^{x=0} = [\xi]^{x=\varepsilon}$$

de l'équation (19), qui est elle-même une conséquence des équations (15) et (16). Mais si ξ, $\frac{d\delta}{dx}$, $\frac{d\delta'}{dx}$ sont des fonctions arbitraires données, on peut toujours déterminer les fonctions auxiliaires φ, ψ, φ', ψ' de telle manière que les équations (15) et (16) soient identiques.

Par conséquent on ne peut jamais déduire les propriétés de ξ de l'équation (19), si l'on ne connaît pas les propriétés des fonctions φ, ψ, φ', ψ'.

De plus on voit facilement quelle est l'erreur de Lorenz. Il est vrai qu'en développant le facteur $e^{-\delta\sqrt{-1}}$, qui entre dans l'équation

$$\frac{d_1(\varphi k)}{dx} = e^{-\delta\sqrt{-1}} \frac{d\left(\varphi e^{\delta\sqrt{-1}} k\right)}{dx},$$

en série suivant les puissances croissantes de δ et en intégrant de $x = 0$ à $x = \varepsilon$, on peut, si δ est très petit, négliger tous les termes suivants par rapport au premier, et qu'on peut traiter d'une manière semblable les expressions analogues. Mais il est faux d'en conclure qu'on puisse en conséquence négliger les facteurs $e^{\delta\sqrt{-1}}$ ou $e^{-\delta\sqrt{-1}}$, qui entrent dans les différents termes de $\frac{d_1\xi}{dx}$, car il peut se faire que les termes indépendants de δ se détruisent à peu près mutuellement, de telle façon que leur somme soit du même ordre que la somme des termes contenant par exemple la première puissance de δ.

On ne peut donc déduire par la voie suivie dans le mémoire aucune des équations (23), (24), (25), (26), mais celles-ci doivent être regardées comme des hypothèses nouvelles.

NOTE 18. Voir note 15.

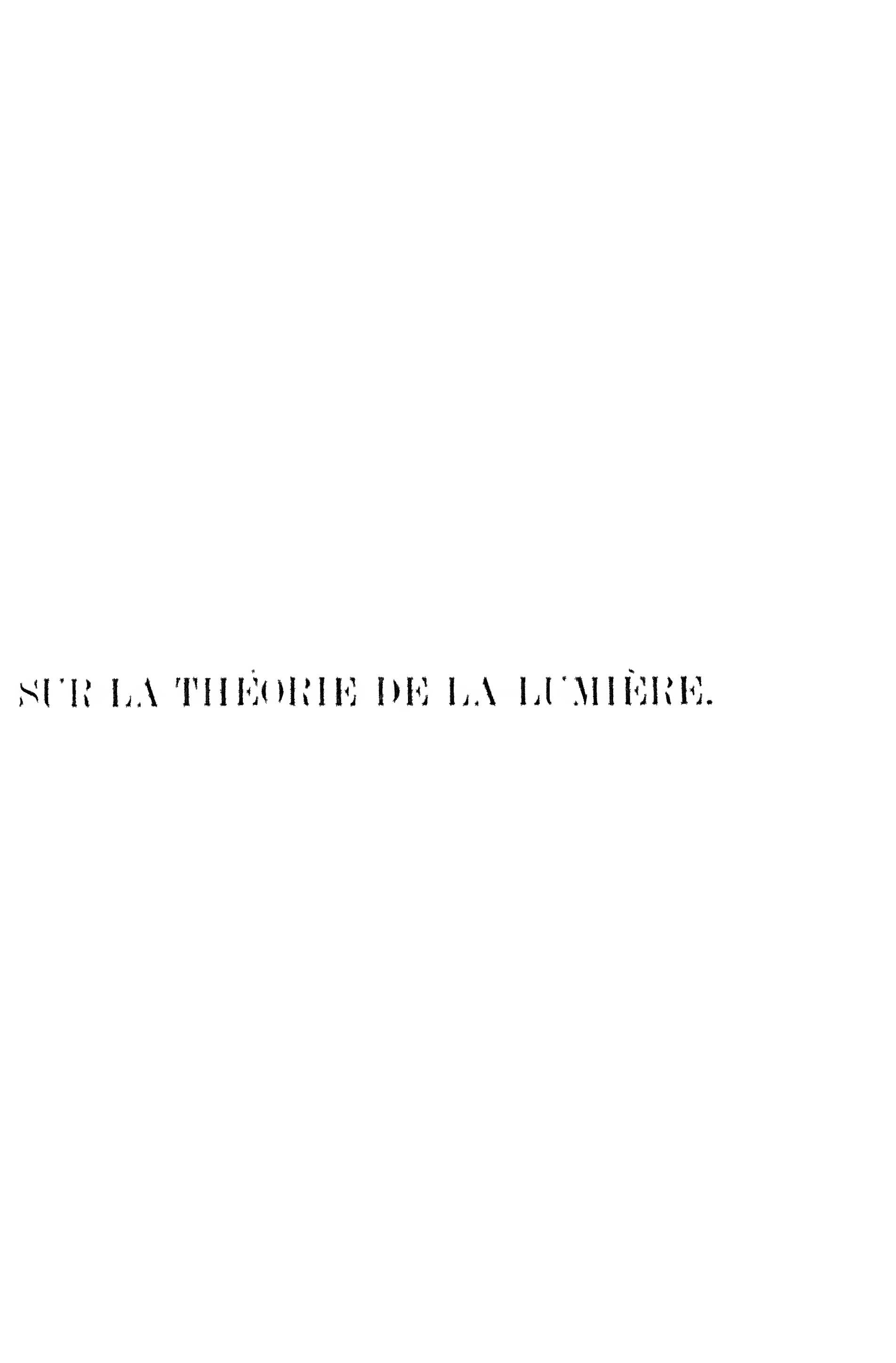
NOTE 19. Voir note 15 et les formules (15) et (17).

NOTE 20. C'est ce qu'on reconnaît en remarquant qu'on a (voir p. 69)

$$k^2\rho = \mu(n^2+l^2) = (\lambda+2\mu)(n^2+l'^2)$$

et par conséquent

$$\sin^2\alpha = \frac{n^2}{n^2+l^2} = \frac{\mu}{(\lambda+2\mu)\left(1+\frac{l'^2}{n^2}\right)}.$$



SUR LA THÉORIE DE LA LUMIÈRE.

SUR LA THÉORIE DE LA LUMIÈRE.

POGG. ANN. T. CXVIII, 1863, P. 111—145.
PHIL. MAG. (4) XXVI, P. 81—93, P. 205—219.*

* NOTE 1.

En comparant toutes les hypothèses de la théorie moderne de la lumière, c'est-à-dire toutes celles qui ont été regardées comme indispensables à l'explication de la réfraction, de la dispersion des couleurs et de la polarisation circulaire, on aura quelque doute à l'égard d'un instrument si compliqué, dont la solidité doit diminuer beaucoup avec le nombre croissant des hypothèses, même quand on est convaincu de la probabilité de chacune d'elles en particulier.

C'est pour cette raison que j'ai cherché à développer la théorie de la lumière en faisant le moins de suppositions possible tant sur la nature de la lumière que sur le milieu où elle se propage et sur les corps qu'elle vient frapper. Des recherches que j'ai faites jusqu'ici il ressortira qu'une partie essentielle des hypothèses physiques ordinaires n'est pas nécessaire pour l'explication des phénomènes lumineux: on peut en effet constituer une théorie complète par une méthode différente de celle qu'on a suivie communément dans les recherches théoriques, et en particulier en donnant un développement plus étendu à la partie formelle de la théorie.

1.

Équation différentielle du mouvement de la lumière dans les milieux hétérogènes et non absorbants.

Si l'on connaît les lois du mouvement de la lumière dans les milieux homogènes et isotropes et les lois du passage de la lumière d'un tel milieu à un autre de même nature, il sera évidemment possible d'étendre le calcul de manière à obtenir les lois du mouvement dans les milieux hétérogènes, mouvement qui résulte des rayons transmis et réfléchis une infinité de fois. J'ai conduit le calcul jusqu'au bout dans le cas simple d'un milieu composé de couches parallèles très minces, et j'ai trouvé qu'un tel milieu disperse la lumière et est doublement réfringent à la manière d'un cristal uniaxe dont l'axe optique serait perpendiculaire aux couches. Mais, quoiqu'il soit possible d'étendre davantage la solution du problème sans faire de nouvelles hypothèses, cependant la méthode est en elle-même tellement imparfaite, que j'ai rencontré des difficultés insurmontables quand j'ai essayé de composer un milieu de deux systèmes de couches parallèles entrecroisées. On est donc dans ce cas obligé de recourir aux méthodes plus parfaites de l'analyse mathématique en exprimant les lois du mouvement dans les milieux hétérogènes par des équations aux dérivées partielles, et en calculant ensuite la marche des rayons par intégration de ces équations.

Pour cette raison il est indispensable de bien préciser les hypothèses et avant tout de remplacer la notion du plan de polarisation par celle du plan de vibration. Il faut déterminer le mouvement, en grandeur et direction, par l'amplitude et par la direction des vibrations;

mais en empruntant ces notions à l'idée ordinaire des vibrations des corps élastiques, nous ne ferons pas une hypothèse complètement déterminée, puisqu'il est nécessaire qu'on puisse aussi interpréter les vibrations comme des rotations. Dans ce cas la direction des vibrations serait l'axe de rotation, et l'amplitude des vibrations la distance angulaire des éléments en rotation à leur position d'équilibre.

Il me faut insister ici sur cette double interprétation, parce que les calculs qui suivent ne nous obligeront pas à préciser davantage cette première hypothèse physique; et, comme le mémoire ne me donnerait pas une autre occasion de revenir sur la partie physique de la théorie, qu'il me soit permis de faire observer ici que l'hypothèse des vibrations, loin d'être une pure fiction mathématique, apparaîtra à la fin des présentes recherches comme le fondement le plus juste peut-être qu'on puisse donner à la théorie physique.

Nous ferons donc les hypothèses suivantes, y compris l'indétermination dont je viens de parler:

1) L'amplitude et la direction des vibrations donneront suivant les axes de coordonnées rectangulaires trois composantes ξ, η, ζ qui servent à la détermination du mouvement du point considéré.

On suppose la loi des vibrations exprimée par les équations suivantes aux dérivées partielles, qui sont valables pour les milieux isotropes et homogènes:

$$\Delta^2 \xi = \frac{1}{\omega^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}, \quad \Delta^2 \eta = \frac{1}{\omega^2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}, \quad \Delta^2 \zeta = \frac{1}{\omega^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}, \qquad (1)$$

Δ^2 désignant l'opération

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

ω une constante et t le temps.

Dans un tel milieu, supposé illimité, l'amplitude des vibrations peut, comme on sait, être exprimée par des termes de la forme

$$a\cos(kt-lx-my-nz+d)$$

ou

$$(a+b\sqrt{-1})e^{(kt-lx-my-nz)\sqrt{-1}}.$$

La lumière est donc composée de vibrations périodiques qui se propagent avec la vitesse constante $\omega\frac{k}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$ dans la direction de la normale au plan

$$lx+my+nz=0.$$

La direction de cette normale sera donc celle du rayon de lumière.

2) Dans un milieu homogène et isotrope les vibrations sont perpendiculaires au rayon de lumière, ou plus généralement (c'est-à-dire dans le cas d'un milieu limité) les trois composantes sont liées par l'équation différentielle

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\zeta}{\partial z}=0. \qquad (2)$$

3) Le plan qui passe par la direction des vibrations et le rayon lumineux est perpendiculaire au plan de polarisation du rayon. Cette hypothèse ne peut guère avoir d'influence sur les résultats relativement à la propagation de la lumière dans les milieux hétérogènes, en tant que ces résultats sont accessibles à nos observations, attendu qu'ils peuvent être déduits sans aucune hypothèse

sur la direction des vibrations par rapport au plan de polarisation. Mais en tout cas je regarde cette hypothèse comme démontrée par mes expériences (Pogg. Ann., t. 111, p. 315; cette édition, p. 3) sur la diffraction de la lumière, car on n'a besoin que des équations (1) et (2) pour justifier les suppositions faites à l'endroit cité, comme je le démontrerai dans ce qui suit.

Ces trois hypothèses, combinées avec les formules de Fresnel relatives à la réfraction et à la réflexion de la lumière à la surface de séparation de deux milieux isotropes et homogènes, serviront de fondement à la théorie qui va suivre. On ne peut plus en effet douter que les formules ne soient complètement d'accord avec les expériences, et que les petits écarts mis en évidence par Jamin ne puissent etre naturellement expliqués par l'hypothése d'une couche continue établissant la transition d'un corps a un autre (voir Pogg. Ann., t. 111, p. 460, et t. 114, p. 244; cette edition, p. 31 et p. 68).

En realite les petits écarts donnent une confirmation ultérieure de l'exactitude des formules dans le cas où l'indice de refraction change brusquement et dans celui ou il varie infiniment peu, et c'est le dernier cas qui servira ici de base a nos calculs. D'autre part on doit observer, en se servant des formules comme base théorique, qu'elles doivent etre regardées comme déduites seulement des expériences, et que pour cette raison toute autre formule qui présentera la même concordance avec les experiences doit avoir la même validité.

Si l'on cherche à donner aux formules la forme la plus etendue, il est évident que dans l'expression des formules relatives a l'amplitude du rayon réfracté on peut introduire en facteur une puissance arbitraire de

l'indice de réfraction; car à l'intérieur du corps réfringent ni l'intensité ni la direction de polarisation ne peuvent être déterminées par l'expérience, et en dehors du corps le facteur s'évanouira de nouveau. Lors même qu'on pourrait mesurer l'intensité à l'intérieur du corps réfringent, le facteur en question serait encore indéterminé; car, bien qu'on puisse regarder comme démontré par l'expérience que l'intensité de la lumière dans le même corps est proportionnelle au carré de l'amplitude des vibrations, la puissance de l'indice de réfraction qui entre ici comme facteur est encore inconnue dans ce cas. Toutefois nous devrons supposer que ce facteur est le même pour les vibrations contenues dans le plan d'incidence et pour celles qui se trouvent dans le plan perpendiculaire à celui-ci, car cette supposition est nécessaire pour conserver l'homogénéité dans les résultats suivants. Dans cette hypothèse le facteur n'aura aucune influence sur la rotation du plan de polarisation à l'intérieur du corps réfringent, et pour cette raison la détermination de ce facteur ne pourrait pas découler des expériences qui seraient faites en vue de déterminer cette rotation.

De plus le signe de l'amplitude du rayon réfléchi est en partie indéterminé. En désignant par α l'angle d'incidence et par β l'angle de réfraction, on aura, en vertu des formules de Fresnel étendues de la manière que j'ai dite, les expressions suivantes pour les rapports des amplitudes de la lumière incidente, réfractée et réfléchie

$$1 : \frac{2 \cos \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha+\beta) \cos(\alpha-\beta)} \left(\frac{\sin \alpha}{\sin \beta}\right)^p : \pm \frac{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}$$

si les vibrations se trouvent dans le plan d'incidence, et

$$1 : \frac{2 \cos \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha+\beta)} \left(\frac{\sin \alpha}{\sin \beta}\right)^p : \mp \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$$

si les vibrations sont perpendiculaires au plan d'incidence.

Ici p est l'exposant indéterminé dont nous avons parlé et auquel Fresnel attribue la valeur zéro; l'autre indétermination est indiquée par le double signe, mais on doit observer que les signes sont contraires dans les deux cas; car nous pouvons, comme on voit, choisir à volonté la direction positive des vibrations qui se trouvent dans le plan d'incidence et la déterminer de telle manière qu'elle soit située à la gauche de l'observateur, si le plan d'incidence est pris horizontal et si l'observateur fait face au rayon de lumière, soit incident, soit réfléchi. Mais c'est un fait que, si la lumière est réfléchie par exemple sous un angle à peu près égal à 90°, l'azimut du plan d'incidence ne change pas de signe, les signes étant calculés de la manière indiquée. Par conséquent $\frac{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}$ et $\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$ seront dans ce cas $(\alpha+\beta>90°)$ en même temps négatifs ou positifs, ce qu'on ne peut obtenir qu'en supposant que ces deux expressions ont des signes contraires.

Mais nous ne nous servirons des formules citées que dans le cas où l'angle d'incidence est infiniment peu différent de l'angle de réfraction. Si l'on pose $\beta=\alpha+d\alpha$, on aura pour les rapports des amplitudes des vibrations situées dans le plan d'incidence

$$1:1+\left(\frac{1}{\sin 2\alpha}-\frac{p}{\operatorname{tg}\alpha}\right)d\alpha:\pm\frac{d\alpha}{\operatorname{tg}2\alpha} \tag{3}$$

et pour les vibrations perpendiculaires au plan d'incidence

$$1:1+\left(\frac{1}{\sin 2\alpha}-\frac{p}{\operatorname{tg}\alpha}\right)d\alpha:\mp\frac{d\alpha}{\sin 2\alpha}. \tag{4}$$

Nous supposerons d'abord que le corps hétérogène soit stratifié en couches d'une direction donnée et de telle sorte que chaque couche soit perpendiculaire à l'axe des x, homogène et d'une épaisseur infiniment petite, et qu'elle diffère infiniment peu de la couche suivante. A l'intérieur d'une telle couche le rayon se propage comme dans un corps homogène, mais à la surface de séparation il sera réfléchi en partie. Les vibrations seront perpendiculaires aux directions des rayons, tant pour le rayon incident que pour le rayon réfléchi. Nous avons ici en vue les rayons élémentaires ou le mouvement virtuel des rayons. En ce qui concerne le mouvement résultant ou actuel, il peut se faire que la direction de vibration soit toute différente, les divers rayons réfléchis par les couches successives se détruisant par exemple, tout en ayant une influence sur la direction des vibrations du rayon transmis.

Si nous prenons le plan d'incidence pour plan des coordonnées xz, l'amplitude du rayon à son entrée dans le corps, c'est-à-dire pour $x = 0$, peut être exprimée par des termes de la forme

$$Ae^{(kt-nz)\sqrt{-1}} = P. \tag{5}$$

En continuant sa marche à travers le corps, le rayon sera continuellement réfléchi en partie, tandis que la valeur de A varie, ainsi que l'exposant de la partie transmise.

L'amplitude aura alors la forme

$$\rho P e^{-\delta\sqrt{-1}} \tag{6}$$

dans une couche correspondant à l'angle d'incidence α, couche que nous désignerons par (α), ρ et δ (la perte de phase) étant des fonctions de x.

Dans la couche suivante α et ρ seront remplacés par $\alpha + d\alpha$ et $\rho + d\rho$, et on aura en vertu de (3) et (4), la direction de vibration étant quelconque,

$$d\rho = \rho\left(\frac{1}{\sin 2\alpha} - \frac{p}{\operatorname{tg} \alpha}\right) d\alpha.$$

De cette équation résulte par intégration

$$\rho = \sqrt{\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} a}} \left(\frac{\sin a}{\sin \alpha}\right)^p, \tag{7}$$

a étant l'angle d'incidence pour $\rho = 1$, c'est-à-dire à l'entrée du rayon dans le corps.

Pour le rayon réfléchi par la couche suivante $(\alpha + d\alpha)$, ρ aura la valeur $\mp \rho \frac{d\alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha}$, si les vibrations sont situées dans le plan d'incidence et $\pm \rho \frac{d\alpha}{\sin 2\alpha}$ si elles sont perpendiculaires à ce plan. Ces valeurs seront toutes deux désignées par $\rho\, du$, en posant dans le premier cas

$$u = \mp \tfrac{1}{2} \log \sin 2\alpha \ \ldots \tag{8}$$

et dans le second

$$u = \pm \tfrac{1}{2} \log \operatorname{tg} 2\alpha. \tag{9}$$

Nous désignerons des fonctions analogues à ρ, δ, u correspondantes aux couches (α_1), (α_2) ... par les mêmes lettres affectées des indices 1, 2 ..., et les mêmes fonctions correspondantes aux couches (a) et (b), (b) étant la dernière couche du corps, par ρ_a, δ_a, u_a et ρ_b, δ_b, u_b.

L'amplitude du rayon réfléchi par la couche (α_2) sera donc

$$\rho_2 P e^{-\delta_2 \sqrt{-1}} du_2.$$

Le rayon passant de cette couche, pour laquelle la perte de phase est δ_2, à une couche suivante (α_1), la

NOTE 2. phase sera en retard de la quantité $\delta_2 - \delta_1$.* L'amplitude sera donc ici

$$\rho_1 P e^{(-2\delta_2+\delta_1)\sqrt{-1}} du_2.$$

Le rayon sera de nouveau réfléchi partiellement par le plan de séparation de la couche suivante $(a_1 - da_1)$, et la partie réfléchie aura l'amplitude

$$-\rho_1 P e^{(-2\delta_2+\delta_1)\sqrt{-1}} du_2 du_1.$$

Le rayon parviendra enfin à la couche (a), la phase étant de nouveau en retard de $\delta - \delta_1$, et il aura l'amplitude

$$-\rho P e^{(-2\delta_2+2\delta_1-\delta\sqrt{-1})} du_2 du_1.$$

La somme des amplitudes de tous les rayons réfléchis deux fois par l'ensemble des couches sera donc exprimée par l'intégrale double de cette expression, u_2 variant de u_1 à u_b, et ensuite u_1 variant de u_a à u. Cette somme sera par suite

$$-\rho P e^{-\delta\sqrt{-1}} \int_{u_a}^{u} du_1 \int_{u_1}^{u_b} du_2 \, e^{2(\delta_1-\delta_2)\sqrt{-1}}, \qquad (10)$$

$\rho P e^{-\delta\sqrt{-1}}$ étant, en vertu de (6), l'amplitude du rayon non réfléchi.

Soit

$$\rho P e^{-\delta\sqrt{-1}} U \qquad (11)$$

l'amplitude du rayon composé des rayons réfléchis 0, 2, 4 . . . fois; U sera déterminé par l'équation

$$U = 1 - \int_{u_a}^{u} du_1 \int_{u_1}^{u_b} du_2 \, e^{2(\delta_1-\delta_2)\sqrt{-1}} U_2, \qquad (12)$$

U_2 étant une fonction formée avec u_2 comme U l'est avec u. Si l'on substitue cette valeur de U_2, U sera exprimée par une série infinie. La validité de l'expression (11) devient évidente par ce développement en série, dont les termes successifs désignent les amplitudes des rayon réfléchis 0, 2, 4 ... fois; elle l'est également par la raison que nous pouvons supposer que ce rayon composé a été de nouveau réfléchi deux fois par toutes les couches sans que l'expression obtenue soit changée par cette opération.

D'ailleurs, l'amplitude du rayon composé réfléchi 1, 3, 5 ... fois est exprimée par

$$\rho P e^{-\delta i} \frac{dU}{du}. \qquad (13)$$

Cette expression est, comme on voit, en vertu de (11), égale à

$$\rho P \int_{u}^{u_1} du_1 e^{(2-2\delta i)(u_1-u)} U_2,$$

et cette intégrale représente l'amplitude du rayon composé réfléchi une fois par la couche (u).

Les deux rayons composés, le rayon réfléchi et le rayon réfracté, produisent en se superposant le mouvement actuel de la lumière dans le corps. Si les vibrations sont perpendiculaires au plan d'incidence, leur direction est la même dans les deux rayons et l'amplitude actuelle sera alors la somme des deux expressions (11) et (13). Si au contraire les vibrations sont situées dans le plan d'incidence, elles feront dans les deux rayons des angles différents avec les axes. Elles sont, comme nous l'avons dit, perpendiculaires au rayon, et si l'on compte

la direction positive à la gauche d'un observateur qui fait face au rayon, les vibrations du rayon incident feront dans la couche (α) l'angle $90°-\alpha$ avec l'axe des x et $180°-\alpha$ avec l'axe des z, tandis que celles du rayon réfléchi feront l'angle $90°-\alpha$ avec l'axe des x et l'angle
* NOTE 3. α avec l'axe des z.*

Si l'on désigne les composantes de l'amplitude actuelle suivant les deux axes par ξ et ζ, on aura

$$\xi = \sin\alpha \cdot \rho P e^{-\delta\sqrt{-1}}\left(U - \frac{dU}{du}\right), \tag{14}$$

$$\zeta = -\cos\alpha \cdot \rho P e^{-\delta\sqrt{-1}}\left(U + \frac{dU}{du}\right). \tag{15}$$

La fonction U est déterminée par l'expression (12) ou par l'équation différentielle

$$\frac{d^2U}{du^2} - 2\sqrt{-1}\frac{d\delta}{du}\frac{dU}{du} = U \tag{16}$$

déduite de cette expression.

Si l'on pose

$$e^{-\delta\sqrt{-1}}\left(U - \frac{dU}{du}\right) = s, \quad e^{-\delta\sqrt{-1}}\left(U + \frac{dU}{du}\right) = s', \tag{17}$$

on obtiendra, en écrivant simplement $d\delta$ au lieu de $\frac{d\delta}{du}du$,

$$\frac{d(e^u s)}{d\delta} = -\sqrt{-1}\, e^u s', \quad \frac{d(e^{-u}s')}{d\delta} = -\sqrt{-1}\, e^{-u} s,$$

et par conséquent

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{d\delta}\left(e^{-2u}\frac{d(e^u s)}{d\delta}\right) + e^{-u}s = 0, \\ \frac{d}{d\delta}\left(e^{2u}\frac{d(e^{-u}s')}{d\delta}\right) + e^u s' = 0. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

De plus nous remplacerons dans les équations (14) et (15) $\sin\alpha$ et $\cos\alpha$ par des expressions nouvelles. Il faut rappeler que, d'après (5) et (6), l'âmplitude du rayon simple transmis par la couche (α) était exprimée par des termes de la forme

$$A\rho e^{(kt-\delta-nz)\sqrt{-1}}.$$

Dans l'element de temps dt le mouvement s'est propagé à la petite distance $\cos\alpha dx$ ou $\sin\alpha dz$ avec une vitesse ω, et par consequent cette distance est déterminée par

$$\omega dt = \cos\alpha dx \quad \text{ou} \quad \omega dt = \sin\alpha dz.$$

Mais, le temps et les coordonnées variant en même temps, la phase $kt-\delta-nz$ reste invariable. On aura donc

$$0 = kdt - \frac{d\delta}{dx}dx \quad \text{et} \quad 0 = kdt - ndz,$$

et cette equation combinée avec la précédente donnera

$$k\cos\alpha = \omega\frac{d\delta}{dx} \quad \text{et} \quad k\sin\alpha = \omega n. \qquad (19)$$

Si nous introduisons les expressions (5) et (7) de P et ρ, et si nous posons

$$\omega^p\xi = \xi, \quad \omega^p\zeta = \zeta, \qquad (20)$$

nous obtiendrons

$$\xi = A_1\frac{\omega n s}{\sqrt{\frac{d\delta}{dx}}}e^{(kt-nz)\sqrt{-1}}, \qquad (21)$$

$$\zeta = A_1\omega\sqrt{\frac{d\delta}{dx}}\,s e^{(kt-nz)\sqrt{-1}}, \qquad (22)$$

A_1 designant un facteur constant.

De plus nous aurons en vertu de (8)

$$u = \mp \tfrac{1}{2} \log \sin 2\alpha = \text{const.} \mp \tfrac{1}{2} \log \left(\omega^2 \frac{d\delta}{dx}\right),$$

expression dans laquelle on peut négliger la constante. Dans le premier des deux cas indiqués par le double signe, on aura donc

$$u = -\tfrac{1}{2} \log \left(\omega^2 \frac{d\delta}{dx}\right). \tag{23}$$

Si nous introduisons cette valeur de u dans les expressions de s et s', on aura en vertu des équations (21) et (22), en prenant x pour variable indépendante,

$$\frac{d}{dx}\left[\omega^2 \frac{d\left(\frac{1}{\omega^2}\bar{\xi}\right)}{dx}\right] + \left(\frac{d\delta}{dx}\right)^2 \bar{\xi} = 0, \tag{24}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\omega^2\left(\frac{d\delta}{dx}\right)^2} \frac{d\bar{\zeta}}{dx}\right] + \frac{1}{\omega^2}\bar{\zeta} = 0. \tag{25}$$

Si dans la dernière équation nous posons

$$\frac{1}{\omega^2\left(\frac{d\delta}{dx}\right)^2} \frac{d\bar{\zeta}}{dx} = \varphi,$$

celle-ci sera remplacée par les suivantes

$$\frac{d\varphi}{dx} + \frac{1}{\omega^2}\bar{\zeta} = 0, \tag{26}$$

$$\frac{d\left(\omega^2 \frac{d\varphi}{dx}\right)}{dx} + \omega^2 \left(\frac{d\delta}{dx}\right)^2 \varphi = 0. \tag{27}$$

En vertu des équations (19), ou aura

$$\left(\frac{d\partial}{dx}\right)^2 = \frac{k^2}{\omega^2} - n^2,$$

et en remarquant que t et z n'entrent pas dans les fonctions $\bar{\xi}$, $\bar{\zeta}$ et φ en dehors du facteur $e^{(kt-nz)\sqrt{-1}}$, on reconnaît que les facteurs k^2, n, n^2 multipliés par ces fonctions peuvent être remplacés par les symboles

$$-\frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad \sqrt{-1}\,\frac{\partial}{\partial z}, \quad -\frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

On obtiendra donc, au moyen de l'équation (27),

$$\frac{d\left(\omega^2 \frac{d\varphi}{dx}\right)}{dx} + \omega^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}. \qquad (28)$$

L'équation (24) peut être déduite de la même équation (27) en posant

$$\omega^2 \varphi = a\bar{\xi};*$$

* NOTE 4.

mais la constante a ne peut pas avoir une valeur arbitraire, ce qu'on voit en introduisant cette valeur de φ dans (26).

On aura alors

$$a\frac{d\left(\frac{1}{\omega^2}\bar{\xi}\right)}{dx} + \frac{1}{\omega^2}\bar{\zeta} = 0.$$

Mais cette équation doit encore être admissible si ω est indépendant de x, et on aura dans ce cas, en vertu de l'hypothèse (2),

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0 \quad \text{ou bien} \quad \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial x} - n\sqrt{-1}\,\bar{\zeta} = 0,$$

d'où il suit que $a = \dfrac{\sqrt{-1}}{n}$.

L'équation deviendra alors

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{\omega^2}\bar{\xi}\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(\frac{1}{\omega^2}\bar{\zeta}\right)}{\partial z}=0.$$

En différentiant l'équation (28) par rapport à par rapport à x et en posant $\frac{\partial\varphi}{\partial z}=\frac{1}{\omega^2}\bar{\xi}$ et $\frac{\partial\varphi}{\partial x}=-$ on aura

$$\frac{\partial^2\bar{\xi}}{\partial z^2}-\frac{\partial^2\bar{\zeta}}{\partial x\,\partial z}=\frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2\bar{\xi}}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial^2\bar{\zeta}}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\bar{\xi}}{\partial x\,\partial z}=\frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2\bar{\zeta}}{\partial t^2}.$$

On peut faire le calcul de la même manière, si prend le signe inférieur dans l'expression de u, (l'on pose

$$u=\tfrac{1}{2}\log\left(\omega^2\frac{d\delta}{dx}\right);$$

mais dans cette supposition les résultats ne seront aussi simples que précédemment. La raison en est $\frac{d\delta}{dx}=\sqrt{\frac{k^2}{\omega^2}-n^2}$ entrera comme facteur dans les ex sions de $\bar{\xi}$ et $\bar{\zeta}$, et celles-ci ne peuvent pas être déterm par des équations différentielles du second ordre. que cela soit possible il est nécessaire de prend signe supérieur dans les formules de Fresnel, doi sous la forme indiquée ci-dessus; et nous ne pou vrons pas plus loin les conséquences de la suppos contraire.

Si les vibrations de la lumière sont perpendicul au plan d'incidence, on aura en vertu de l'équatio pourvu qu'on prenne seulement le signe supérieur,

$$u=\tfrac{1}{2}\log\operatorname{tg}\alpha=\text{const.}-\tfrac{1}{2}\log\frac{d\delta}{dx}.$$

L'amplitude actuelle η est la somme des deux expressions (11) et (13) ou

$$\eta = \rho P e^{-\delta\sqrt{-1}}\left(U - \frac{dU}{du}\right) = \rho P s.$$

Si l'on pose

$$\omega^p \eta = \overline{\eta}, \tag{32}$$

on obtiendra

$$\overline{\eta} = A_1 \frac{ks}{\sqrt{\frac{d\delta}{dx}}} e^{(kt-nz)\sqrt{-1}}, \tag{33}$$

A_1 désignant comme auparavant un facteur constant. La première équation (18) donnera

$$\frac{d^2\overline{\eta}}{dx^2} + \left(\frac{d\delta}{dx}\right)^2 \overline{\eta} = 0$$

ou

$$\frac{\partial^2\overline{\eta}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\overline{\eta}}{\partial z^2} = \frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2\overline{\eta}}{\partial t^2}. \tag{34}$$

Des équations obtenues pour la détermination de $\overline{\xi}$, $\overline{\eta}$, $\overline{\zeta}$ on peut déduire les équations générales dans le cas où les composantes dépendent aussi de y. Il faudra nécessairement qu'elles aient la forme suivante

$$\left.\begin{aligned} \Delta^2\overline{\xi} - \frac{\partial\overline{\theta}}{\partial x} &= \frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2\overline{\xi}}{\partial t^2}, \\ \Delta^2\overline{\eta} - \frac{\partial\overline{\theta}}{\partial y} &= \frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2\overline{\eta}}{\partial t^2}, \\ \Delta^2\overline{\zeta} - \frac{\partial\overline{\theta}}{\partial z} &= \frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2\overline{\zeta}}{\partial t^2}, \end{aligned}\right\} \quad (A)$$

où

$$\Delta^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

et

$$\overline{\theta} = \frac{\partial\overline{\xi}}{\partial x} + \frac{\partial\overline{\eta}}{\partial y} + \frac{\partial\overline{\zeta}}{\partial z}.$$

Nous retomberons de nouveau sur les équations (30), (31) et (34) si les composantes ne dépendent pas de y.

De la forme symétrique des équations (A), qui ne changent pas par une rotation des axes coordonnés, nous pouvons conclure en outre qu'elles seront encore admissibles, si ω regardé jusqu'ici comme fonction de x seulement est une fonction arbitraire de x, y, z. Ces équations expriment donc les lois générales du mouvement de la lumière dans un milieu hétérogène quelconque, qui toutefois n'absorbe pas la lumière.

Les principes dont on doit se servir pour le calcul de la diffraction, de la réflexion et de la réfraction de la lumière, ou les conditions qui doivent être remplies dans le passage de la lumière d'un corps à un autre peuvent aisément être déduites de ces équations générales. Supposons que le plan des coordonnées yz soit le plan de séparation, pour lequel on veut chercher les conditions de passage. On multipliera alors les équations par dx et par $dxdx$ et on les intégrera une fois et deux fois de $x = 0$ à $x = \varepsilon$, ε ayant une valeur infiniment petite. Toutes les intégrales dont les éléments ne sont pas infinis s'évanouiront, et les éléments ne deviendront infinis qu'à condition qu'ils contiennent les dérivées par rapport à x. On peut donc de la seconde équation différentielle (A) déduire

$$\left[\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial y}\right]_{x=0}^{x=\varepsilon} = 0 \quad \text{et} \quad [\eta]_{x=0}^{x=\varepsilon} = 0. \tag{35}$$

Pareillement de la troisième équation (A) on peut déduire

$$\left[\frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial z}\right]_{x=0}^{x=\varepsilon} = 0 \quad \text{et} \quad [\zeta] = 0. \tag{36}$$

En général la première équation donnerait aussi deux équations de condition, et on obtiendrait en tout six équations de condition; mais ici de la première équation on ne peut déduire que la relation

$$\left[\frac{\partial \overline{\eta}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{\zeta}}{\partial z}\right]_{x=0}^{x=\varepsilon} = 0$$

(ce qu'on pourrait aussi conclure des équations trouvées auparavant) et l'identité $0 = 0$.

Mais les quatre équations de condition (35) et (36) déjà obtenues suffisent précisément au calcul. La théorie de l'élasticité donne au contraire six conditions pour la surface de séparation, et nous sommes par conséquent forcés de supposer qu'il se produit des vibrations longitudinales à chaque réfraction.

J'ai déjà indiqué que les hypothèses dont je me suis servi comme base pour le calcul de la diffraction de la lumière (Pogg. Ann., t. 111; premier mémoire de cette édition) peuvent être déduites des hypothèses (1) et (2). Cela peut se faire par la méthode employée ici en multipliant les équations (1) par dx et par $dx\,dx$ et en intégrant une fois et deux fois de $x = 0$ à $x = \varepsilon$. Les six équations obtenues de cette manière expriment que les composantes des vibrations et leurs dérivées par rapport à x sont égales des deux côtés du plan $x = 0$.

2.

*Intégration des équations différentielles: Double réfraction, dispersion.**

* NOTE 5.

Dans les équations (A) qui expriment les lois du mouvement de la lumière dans les corps hétérogènes et qui n'exigent pas qu'on se forme une idée précise de la

nature des vibrations, ne se trouve qu'une seule fonction ω qui dépend immédiatement de l'hétérogénéité des corps et qui pour cette raison peut être une fonction arbitraire de x, y, z. Une telle fonction peut, comme on sait, en vertu du théorème de Fourier être développée en série et représentée par la formule

$$\frac{1}{\omega^2} = \frac{1}{\Omega^2}[1 + \Sigma \varepsilon_p \cos \rho_p], \tag{1}$$

où

$$\rho_p = \frac{a_p x + b_p y + c_p z + d_p}{\alpha_p}, \quad a_p^2 + b_p^2 + c_p^2 = 1.$$

Les coefficients Ω, ε_p, ... sont des constantes et Σ désigne la somme qu'on aura en attribuant toutes les valeurs entières à l'indice p.

On obtiendra de cette manière l'expression la plus générale de la fonction $\frac{1}{\omega^2}$; mais si l'on conservait une telle généralité, qui embrasse un conglomérat quelconque de corps transparents, l'intégrale ne représenterait qu'un mélange confus de mouvements de la lumière. C'est pourquoi nous ferons une restriction essentielle, qui pourtant ne modifie pas la forme de l'équation (1): nous supposerons que les quantités α_p aient des valeurs très petites. Dans cette hypothèse la formule présentera une périodicité et une régularité telles que le même mouvement se répétera très vite en différents points du corps.

On aura une première approximation en supposant que les quantités α_p aient une valeur presque infiniment petite; ce cas ne sera pas identique à celui d'une homogénéité complète, mais nous serons conduits par cette supposition, comme nous le verrons, à la double réfraction.

Les composantes $\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}$ peuvent être exprimées par une série de la forme suivante:

$$\begin{aligned} \bar{\xi} = {} & \bar{\xi}_0 C + \Sigma \bar{\xi}(\pm \rho_p) C(\pm \rho_p) \\ & + \Sigma \Sigma \bar{\xi}(\pm \rho_p \pm \rho_q) C(\pm \rho_p \pm \rho_q) \ldots; \end{aligned} \tag{2}$$

$\bar{\xi}_0$, $\bar{\xi}(\pm \rho_p)$ ... désignent ici les coefficients constants des quantités variables C, $C(\pm \rho_p)$ ..., et l'on a posé pour abréger

$$\begin{aligned} \cos(kt - lx - my - nz) &= C, \\ \cos(kt - lx - my - nz + \rho_p) &= C(+\rho_p). \end{aligned}$$

Le double signe désigne la somme des deux expressions sur lesquelles il porte; Σ, $\Sigma\Sigma$... représentent la somme, la somme double, etc., pour tous les indices p, q, ... qui peuvent avoir les mêmes valeurs que l'on a attribuées à l'indice p dans l'équation (1).

Dans la somme double et dans les termes suivants on doit pourtant négliger tous les termes qui sont déjà compris parmi les termes antérieurs; ainsi pour $q = p$ on doit omettre le terme $\bar{\xi}(\rho_p - \rho_q) C(\rho_p - \rho_q)$.

Il va de soi qu'on peut supposer que deux quantités ρ_p et ρ_q, correspondant à des indices p et q inégaux, diffèrent de telle manière que leur somme ou leur différence n'est pas constante. Au contraire il peut se faire que 3, 4 ... des quantités ρ_p donnent par addition ou soustraction des valeurs constantes. Ce dernier cas ne sera pourtant considéré que dans la partie suivante.

En permutant dans l'équation (2) la lettre ξ avec η ou ζ, on aura deux développements analogues pour $\bar{\eta}$ et $\bar{\zeta}$.

En multipliant les équations (1) et (2), on trouvera

$$\frac{\Omega^2}{\omega^2}\xi = \left[\bar{\xi}_0 + \Sigma\frac{\varepsilon_p}{2}\bar{\xi}(\pm\rho_p)\right]C$$

$$+\Sigma\left[\bar{\xi}(\pm\rho_p) + \frac{\varepsilon_p}{2}\bar{\xi}_0 + \Sigma\frac{\varepsilon_q}{2}\bar{\xi}(\pm\rho_p\pm\rho_q)\right]C(\pm\rho_p)+\ldots \quad (3)$$

Cette valeur et les valeurs analogues de $\frac{\Omega^2}{\omega^2}\bar{\eta}$, $\frac{\Omega^2}{\omega^2}\zeta$ étant substituées dans les seconds membres des équations différentielles (A), on trouvera en comparant les coefficients de C au moyen de la première équation (A)

$$\bar{\xi}_0 + \Sigma\frac{\varepsilon_p}{2}\bar{\xi}(\pm\rho_p) = \frac{\Omega^2}{k^2}[(l^2+m^2+n^2)\bar{\xi}_0 - l(l\bar{\xi}_0+m\bar{\eta}_0+n\bar{\zeta}_0)]. \quad (4)$$

On obtiendra les équations analogues au moyen des deux autres équations (A); mais elles peuvent aussi être déduites de (4) en permutant ξ et η, l et m, ou ξ et ζ, l et n.

Les seconds membres de ces trois équations seront désignés par $\omega(\bar{\xi}_0)$, $\omega(\bar{\eta}_0)$ et $\omega(\bar{\zeta}_0)$.

En comparant les coefficients de $C(\pm\rho_p)$, $C(\pm\rho_p\pm\rho_q)$, etc. on peut en outre, avec une approximation aussi grande qu'on veut, exprimer les coefficients $\bar{\xi}(\pm\rho_p)$, $\bar{\xi}(\pm\rho_p\pm\rho_q)$, $\bar{\eta}(\pm\rho_p)\ldots$ en fonction linéaire de $\bar{\xi}_0$, $\bar{\eta}_0$, $\bar{\zeta}_0$. L'équation (4) et les deux équations analogues prendront alors la forme suivante

$$\left.\begin{aligned} a_{11}\bar{\xi}_0 + a_{12}\bar{\eta}_0 + a_{13}\bar{\zeta}_0 &= \overline{\omega(\bar{\xi}_0)}, \\ a_{21}\bar{\xi}_0 + a_{22}\bar{\eta}_0 + a_{23}\bar{\zeta}_0 &= \overline{\omega(\bar{\eta}_0)}, \\ a_{31}\bar{\xi}_0 + a_{32}\bar{\eta}_0 + a_{33}\bar{\zeta}_0 &= \overline{\omega(\bar{\zeta}_0)}. \end{aligned}\right\} \quad (B)$$

Ces équations déterminent la partie non périodique des composantes de l'amplitude et par conséquent la partie du mouvement de la lumière qu'on peut observer, car les mouvements périodiques se détruisent mutuelle-

ment en s'évanouissant par l'intégration sur un petit espace.

On peut démontrer qu'entre les coefficients des équations (*B*) existent les trois relations:

$$a_{12} = a_{21}, \quad a_{23} = a_{32}, \quad a_{31} = a_{13}, \qquad (5)$$

que ces coefficients sont indépendants de l, m, n si les quantités ρ_p ont des valeurs infiniment petites, et qu'ils peuvent dans le cas contraire être développés suivant les puissances de l, m, n de telle manière qu'ils ne se trouvent comme facteurs qu'en nombre pair.

Si l'on restreint la démonstration au cas où ε_p a une valeur petite, on trouvera alors simplement, en comparant les coefficients de $e^{i}(\rho_p)$,

$$\xi(\rho_p) = \sum_p \frac{\omega^2}{k^2}\{(l_p^2 + m_p^2 + n_p^2)\,\xi(\rho_p) - l_p(l_p\,\xi(\rho_p) + m_p\,\eta(\rho_p) + n_p\,\zeta(\rho_p))\} \qquad (6)$$

où

$$l_p = l\frac{a_p}{a_p}, \quad m_p = m\frac{b_p}{a_p}, \quad n_p = n\frac{c_p}{a_p}.$$

Multiplions l'équation (6) par l_p, puis formons les deux équations analogues en permutant ξ avec η, l avec m, ou ξ avec ζ, l avec n. Par l'addition des trois équations ainsi obtenues on aura

$$l_p\,\xi(\rho_p) + m_p\,\eta(\rho_p) + n_p\,\zeta(\rho_p) = \sum_p (l_p\,\xi_0 + m_p\,\eta_0 + n_p\,\zeta_0) = 0.$$

Cette dernière combinée avec la précédente donnera

$$\left(l_p^2 + m_p^2 + n_p^2 - \frac{k^2}{\omega^2}\right)\xi(\rho_p) = \sum_p \left|\left(\frac{k^2}{\omega^2} - l_p^2\right)\xi_0 - l_p m_p \eta_0 - l_p n_p \zeta_0\right|, \qquad (7)$$

et l'on peut grâce à celle-ci exprimer la somme $\Sigma \frac{\varepsilon_p}{2}\xi(\rho_p)$.

qui figure dans l'équation (4), en fonction linéaire de $\bar{\xi}_0$, $\bar{\eta}_0$, $\bar{\zeta}_0$. Le coefficient de $\bar{\eta}_0$ sera par exemple

$$-\Sigma\left(\frac{\varepsilon_p}{2}\right)^2 \frac{(a_p \pm l\alpha_p)(b_p \pm m\alpha_p)}{(a_p \pm l\alpha_p)^2 + (b_p \pm m\alpha_p)^2 + (c_p \pm n\alpha_p)^2 - \frac{k^2}{\Omega^2}\alpha_p^2},$$

et ce coefficient est celui qui dans (B) est désigné par a_{12}.

On formera l'expression de a_{21} en permutant a et b, l et m; mais l'expression précédente demeurant invariable par cette permutation, on aura

$$a_{12} = a_{21}.$$

On peut de la même manière vérifier les deux autres égalités (5).

En développant l'expression ci-dessus ou tout autre coefficient a suivant les puissances croissantes de α_p, on verra que les puissances impaires se détruisent et pour cette raison l, m, n n'entreront comme facteurs qu'en nombre pair.

Pour $\alpha_p = 0$ on aura

$$a_{12} = -\Sigma\left(\frac{\varepsilon_p}{2}\right)^2 a_p b_p, \quad a_{13} = -\Sigma\left(\frac{\varepsilon_p}{2}\right)^2 a_p c_p,$$
$$a_{23} = -\Sigma\left(\frac{\varepsilon_p}{2}\right)^2 b_p c_p.$$

Ces quantités étant indépendantes de l, m, n, les directions des axes de coordonnées peuvent être choisies de telle manière que

$$a_{12} = 0, \quad a_{13} = 0, \quad a_{23} = 0. \tag{8}$$

Si nous désignons par s la vitesse de la lumière, par λ la longueur d'onde, et par u, v, w les cosinus des angles que fait la normale au plan de l'onde avec les axes, nous aurons

$$C = \cos(kt - lx - my - nz) = \cos\frac{2\pi}{\lambda}(st - ux - vy - wz)$$

et par conséquent

$$s = \frac{k}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}, \quad l = \frac{2\pi}{\lambda}u, \quad m = \frac{2\pi}{\lambda}v, \quad n = \frac{2\pi}{\lambda}w.$$

Si nous posons enfin

$$a_{11} = \frac{\Omega^2}{a^2}, \quad a_{22} = \frac{\Omega^2}{b^2}, \quad a_{33} = \frac{\Omega^2}{c^2},$$

nous aurons, en vertu des équations (B),

$$\left.\begin{aligned} \frac{s^2}{a^2}\bar{\xi}_0 &= \bar{\xi}_0 - u(u\bar{\xi}_0 + v\bar{\eta}_0 + w\bar{\zeta}_0), \\ \frac{s^2}{b^2}\bar{\eta}_0 &= \bar{\eta}_0 - v(u\bar{\xi}_0 + v\bar{\eta}_0 + w\bar{\zeta}_0), \\ \frac{s^2}{c^2}\bar{\zeta}_0 &= \bar{\zeta}_0 - w(u\bar{\xi}_0 + v\bar{\eta}_0 + w\bar{\zeta}_0). \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Il s'ensuit que la vitesses de la lumière est déterminée par l'équation suivante

$$\frac{u^2}{a^2 - s_2} + \frac{v^2}{b^2 - s^2} + \frac{w^2}{c^2 - s^2} = 0.^* \qquad (10)$$ * NOTE

Le corps considéré se comporte donc comme un cristal à deux axes par lequel la lumière est doublement réfractée suivant les lois connues de la double réfraction.

Il faut rappeler que les composantes $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, $\bar{\zeta}$ ne sont pas identiques aux composantes ξ, η, ζ, car nous avons posé

$$\xi = \frac{1}{\omega^p}\bar{\xi}, \quad \eta = \frac{1}{\omega^p}\bar{\eta}, \quad \zeta = \frac{1}{\omega^p}\bar{\zeta}.$$

Nous étudierons en particulier deux cas, en attribuant à l'exposant p les deux valeurs 0 et 2. On verra

alors que les résultats sont d'accord avec l'expérience dans l'un et l'autre cas, la composante non périodique de l'amplitude des vibrations étant dans les deux cas située dans le même plan passant par la normale au plan de l'onde.

Soit

$$Ax + By + Cz = D$$

l'équation de ce plan.

Le plan D passera par la normale au plan de l'onde et par la composante non périodique de l'amplitude des vibrations; on aura par conséquent

$$Au + Bv + Cw = 0,$$

et pour $p = 0$

$$A\bar{\xi}_0 + B\bar{\eta}_0 + C\bar{\zeta}_0 = 0.$$

Pour $p = 2$ on aura

$$\xi = \frac{1}{\omega^2}\bar{\xi} = \frac{1}{\Omega^2}\left[\bar{\xi}_0 + \Sigma\frac{\varepsilon_p}{2}\bar{\xi}(\pm\rho_p)\right]C + \dots$$

Si donc l'on désigne par $\xi_0 C$ la partie non périodique de la composante de l'amplitude de la vibration, on aura en vertu de l'équation (4)

$$\xi_0 = \frac{1}{s^2}[\bar{\xi}_0 - u(u\bar{\xi}_0 + v\bar{\eta}_0 + w\bar{\zeta}_0)].$$

Multiplions cette équation par A, et formons les équations analogues par permutation de ξ, A, u avec η, B, v ou avec ζ, C, w; nous aurons en additionnant les trois équations

$$A\xi_0 + B\eta_0 + C\zeta_0 = 0.$$

L'amplitude est donc aussi dans ce cas située dans le plan D, ce qu'il fallait démontrer.

Pour cette raison il n'y aura pas de différence essentielle, que nous supposions $p = 0$ ou $p = 2$, le plan de polarisation étant dans les deux cas le même. Dans le premier cas les composantes de l'amplitude sont déterminées par l'équation (9). Les vibrations ne se trouvent pas alors dans le plan de l'onde, mais on peut facilement reconnaître qu'elles sont perpendiculaires au rayon lumineux* qui, comme on sait, ne coïncide pas avec la normale au plan de l'onde dans les corps doublement réfringents. * NOTE 7.

Dans l'autre cas, $p = 2$, on aura

$$\xi_0 = \frac{1}{a^2}\bar{\xi}_0 = \frac{1}{s^2}[\bar{\xi}_0 - u(u\bar{\xi}_0 + v\bar{\eta}_0 + w\bar{\zeta}_0)],$$

et de cette équation et des équations analogues relatives à η_0 et ζ_0 on déduira facilement

$$\frac{a^2-s^2}{u}\xi_0 = \frac{b^2-s^2}{v}\eta_0 = \frac{c^2-s^2}{w}\zeta_0 = a^2u\xi_0 + b^2v\eta_0 + c^2w\zeta_0. \quad (11)$$

De plus on trouvera $u\xi_0 + v\eta_0 + w\zeta_0 = 0$; par conséquent les vibrations sont situées dans le plan de l'onde, et ce résultat est aussi en parfaite concordance avec la théorie ordinaire de la direction des vibrations. Le plan qui passe par l'amplitude et par la normale au plan de l'onde coïncide donc dans les deux cas ($p = 0$ et $p = 2$), comme dans la théorie ordinaire, avec le plan qui passe par la normale au plan de l'onde et par le rayon lumineux correspondant.

Pour parvenir à la théorie de la dispersion, il est nécessaire de faire encore un pas de plus en tenant compte aussi des puissances plus élevées de α_p. Les coefficients α des équations (B) peuvent, comme nous l'avons dit auparavant, être développés suivant les puis-

sances de l, m, n, de telle manière que ces quantités ne se trouvent comme facteurs qu'en nombre pair; par suite le développement peut aussi se faire suivant les puissances de $\frac{1}{\lambda^2}$, ce qu'on voit en introduisant les valeurs de l, m, n trouvées ci-dessus. Ceci nous donne précisément la loi de la dispersion dans toute l'étendue où elle nous est connue. Il ne serait pas difficile de faire le calcul en toute généralité, mais cela serait, je crois, sans intérêt pratique. Si le corps n'est pas cristallin, ou si aucune direction ne se distingue des autres, la vitesse s sera déterminée par l'équation

$$\frac{\Omega^2}{s^2} = a_{11} = a_{22} = a_{33},$$

où a_{11} peut être développé suivant les puissances paires de $\frac{1}{\lambda}$.

La dispersion est donc, d'après cette théorie, une propriété liée à la nature des corps et qui dépend essentiellement de leur hétérogénéité, tandis que l'absence de dispersion dans le vide ne peut être expliquée par la théorie de Cauchy qu'en faisant des hypothèses nouvelles. Que nous soyons conduits par la théorie de la dispersion à la supposition d'une variation périodique de la densité de l'éther, même en conservant les idées ordinaires sur la nature des vibrations et sur celles de l'éther, c'est ce qu'a déjà montré Eisenlohr (Pogg. Ann., t. 109). Que de cette hypothèse, qui est la plus générale, puisse aussi être déduite la théorie de la double réfraction, c'est ce qui résulte des présentes recherches.

L'hypothèse de Fresnel, que la double réfraction est une conséquence de l'inégale élasticité dans les différentes directions, pourrait peut être sembler confirmée

par le fait que les corps non cristallins deviennent doublement refringents par la compression. Mais on doit remarquer que les dimensions du corps sont aussi changees par la compression, et qu'il doit par consequent en etre de meme des constantes de periodicite et de l'homogeneite dans les differentes directions. Ainsi la dimension verticale est par exemple diminuee par une compression verticale, et en consequence toutes les petites couches irregulieres dont le corps est compose deviendront plus horizontales; le corps doit se comporter dans ce cas comme un cristal doublement refringent a un axe optique vertical.

3.

Intégration des équations différentielles: Polarisation circulaire. * NOTE 8.

Dans les calculs precedents nous ne sommes parvenus qu'a des vibrations rectilignes, et en poursuivant l'approximation nous ne pourrions pas obtenir des vibrations d'une nature differente. Mais, comme je l'ai deja indique, le calcul suppose qu'on ne peut obtenir une valeur constante par l'addition ou par la soustraction de 3, 4 ... des quantites a_j. Or il est necessaire qu'on tienne compte aussi de cette eventualite comme representant le cas le plus general, et l'on verra alors que les formules etablies de cette maniere donneront des vibrations elliptiques dependant des puissances impaires des petites quantites a_j.

En conservant les notations qui precedent, nous poserons de plus

$$S = \sin(kt - lx - my - nz),$$
$$S(\varphi) = \sin(kt - lx - my - nz - \varphi).$$

L'expression (2) prendra alors la forme plus générale

$$\overline{\xi} = \overline{\xi}_0 C + \Sigma \overline{\xi}(\pm\rho_p) C(\pm\rho_p) + \dots$$
$$+ \overline{\xi}'_0 S + \Sigma \overline{\xi}'(\pm\rho_p) S(\pm\rho_p) + \dots, \qquad (12)$$

où les coefficients de S, $S(\pm\rho_p)$ ... sont marqués d'accents. Les composantes $\overline{\eta}$ et $\overline{\zeta}$ sont déterminées d'une manière analogue.

On peut à present démontrer que les équations (B)
* NOTE 9. peuvent être remplacées par les suivantes*:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}\overline{\xi}_0 + a_{12}\overline{\eta}_0 + a_{13}\overline{\zeta}_0 + b_{11}\overline{\xi}'_0 + b_{12}\overline{\eta}'_0 + b_{13}\overline{\zeta}'_0 = \overline{\omega}(\xi_0) \\ a_{21}\overline{\xi}_0 + a_{22}\overline{\eta}_0 + a_{23}\overline{\zeta}_0 + b_{21}\overline{\xi}'_0 + b_{22}\overline{\eta}'_0 + b_{23}\overline{\zeta}'_0 = \overline{\omega}(\eta_0) \\ a_{31}\overline{\xi}_0 + a_{32}\overline{\eta}_0 + a_{33}\overline{\zeta}_0 + b_{31}\overline{\xi}'_0 + b_{32}\overline{\eta}'_0 + b_{33}\overline{\zeta}'_0 = \overline{\omega}(\zeta_0). \end{array}\right\} \quad (C)$$

Ce système peut encore être complété par un système de trois nouvelles équations qui sont formées au moyen des premières en remplaçant $\overline{\xi}_0$, $\overline{\eta}_0$, $\overline{\zeta}_0$ par $\overline{\xi}'_0$, $\overline{\eta}'_0$, $\overline{\zeta}'_0$ et $\overline{\xi}'_0$, $\overline{\eta}'_0$, $\overline{\zeta}'_0$ par $-\overline{\xi}_0$, $-\overline{\eta}_0$, $-\overline{\zeta}_0$; car on voit que, si les équations (12) sont différentiées par rapport à kt, C sera remplacé par $-S$ et S par C; or ceci revient à remplacer ξ par ξ' et ξ' par $-\xi$. Mais si $\overline{\xi}$, $\overline{\eta}$, $\overline{\zeta}$ satisfont aux équations différentielles (A), ces équations seront vérifiées aussi par les dérivées des mêmes quantités par rapport à kt, et par conséquent il sera permis de faire la substitution susdite dans les équations déduites de (A).

On peut de plus démontrer que les coefficients a satisfont toujours aux équations (5), mais que les coefficients b satisferont en général à l'équation

$$b_{pq} = -b_{qp}, \qquad (13)$$

ou qu'on aura

$$b_{12} = -b_{21}, \quad b_{13} = -b_{31}, \quad b_{23} = -b_{32},$$
$$b_{11} = 0, \quad b_{22} = 0, \quad b_{33} = 0.$$

Ces coefficients ne contiendront que des puissances impaires de α_p.

*Ils sont donc très petits en comparaison des coefficients a et peuvent être négligés dans une première approximation ($\alpha_p = 0$), et pour cette raison les résultats de la partie précédente ne seront pas modifiés par les hypothèses faites actuellement dans la première approximation. * NOTE 10.

J'ai poussé le calcul jusqu'au bout dans les deux cas particuliers où trois ou quatre des quantités ρ_p ont une somme constante; le dernier cas n'a été traité que dans l'hypothèse que les quantités ε_p sont très petites. Mais, les résultats déjà mentionnés étant toujours les mêmes, il me sera permis de restreindre la démonstration au cas suivant

$$\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 = \Delta, \tag{14}$$

Δ étant une constante. Je supposerai en outre que ε_p et α_p ont des valeurs petites.

L'équation (4) subsistera toujours, au contraire (6) sera modifiée, si l'indice p a les valeurs 1, 2, 3. Si nous cherchons dans l'équation différentielle (A) le coefficient $C(\rho_1)$, nous trouverons pour $p = 1$ comme premier membre de l'équation (6):

$$\xi(\rho_1) - \frac{\varepsilon_1}{2}\xi_0 = \left[\frac{\varepsilon_3}{2}\xi(-\rho_3) + \frac{\varepsilon_2}{2}\xi(-\rho_2)\right]\cos\Delta^* - \left[\frac{\varepsilon_3}{2}\xi'(-\rho_3) + \frac{\varepsilon_2}{2}\xi'(-\rho_2)\right]\sin\Delta. \tag{15}$$ * NOTE 11.

En négligeant la seconde puissance ou des puissances supérieures de α_p, on aura en vertu de l'équation (6) pour toutes les valeurs de p * * NOTE 12.

$$\frac{\xi(\rho_p)}{l_p} = \frac{\eta(\rho_p)}{m_p} = \frac{\zeta(\rho_p)}{n_p} = \frac{r(\rho_p)}{\sqrt{l_p^2 + m_p^2 + n_p^2}}. \tag{16}$$

Dans ces équations nous introduirons de plus les notations suivantes:

$$l_{\bar{p}} = l + \frac{a_p}{\alpha_p}, \quad m_{\bar{p}} = m + \frac{b_p}{\alpha_p}, \quad n_{\bar{p}} = n + \frac{c_p}{\alpha_p},$$

qui remplaceront l_p, m_p, n_p, si ρ_p est remplacé par $-\rho_p$. De même $r'(\rho_p)$ peut être exprimé au moyen de $\bar{\xi}'(\rho_p)$ . . .

Si l'on multiplie l'équation (15) par l, et si l'on forme les équations analogues en permutant ξ et l avec η et m ou avec ζ et n, la somme de ces trois équations sera égale à zéro en vertu de l'équation (6). Nous posons pour abréger

$$\frac{l_p}{\sqrt{l_p^2 + m_p^2 + n_p^2}} = u_p,$$

$$\frac{m_p}{\sqrt{l_p^2 + m_p^2 + n_p^2}} = v_p, \quad \frac{n_p}{\sqrt{l_p^2 + m_p^2 + n_p^2}} = w_p,$$

$$u_p u_q + v_p v_q + w_p w_q = \theta_{p,q} = \theta_{q,p},$$

$$u_p \bar{\xi}_0 + v_p \bar{\eta}_0 + w_p \bar{\zeta}_0 = E_p, \quad u_p \bar{\xi}_0' + v_p \bar{\eta}_0' + w_p \bar{\zeta}_0' = E_p',$$

et nous obtiendrons alors

$$r(\rho_1) + \frac{\varepsilon_1}{2} E_1 + \frac{\varepsilon_2}{2} \theta_{1,\bar{3}} [r(-\rho_3) \cos \Delta - r'(-\rho_3) \sin \Delta]$$
$$+ \frac{\varepsilon_3}{2} \theta_{1,\bar{2}} [r(-\rho_2) \cos \Delta - r'(-\rho_2) \sin \Delta] = 0.$$

Dans cette équation nous substituerons les valeurs approchées de $r(-\rho_2)$, $r'(-\rho_2)$, $r(-\rho_3)$, $r'(-\rho_3)$ trouvées à l'aide de la même équation en permutant les indices, à savoir $r(-\rho_2) = -\frac{\varepsilon_2}{2} E_{\bar{2}}$ . . . Après cette substitution notre équation sera remplacée par la suivante:

$$r(\rho_1) = -\frac{\varepsilon_1}{2} E_1 + \frac{\varepsilon_2 \varepsilon_3}{4} \theta_{1,\bar{3}} (E_{\bar{3}} \cos \Delta - E_{\bar{3}}' \sin \Delta)$$
$$+ \frac{\varepsilon_2 \varepsilon_3}{4} \theta_{1,\bar{2}} (E_{\bar{2}} \cos \Delta - E_{\bar{2}}' \sin \Delta).$$

Si l'on substitue dans celle-ci $-\rho_1$ à ρ_1, alors ρ_2, ρ_3 et de plus, en vertu de (14), Δ changeront de signe, E_1 sera remplacé par $E_{\bar{1}}$, $\theta_{1,\bar{3}}$ par $\theta_{\bar{1},3}$ ... En permutant les indices on peut déduire des expressions analogues pour $r(\rho_2)$, $r(-\rho_2)$, $r(\rho_3)$, $r(-\rho_3)$.

Si nous cherchons la valeur de

$$\Sigma \frac{\varepsilon_p}{2} \bar{\xi}(\pm \rho_p) = \Sigma \frac{\varepsilon_p}{2} [u_p r(\rho_p) + u_{\bar{p}} r(-\rho_p)]$$

qui sera substituée dans l'équation (4), le calcul ne différera pas de celui que nous avons fait auparavant si p n'est pas égal à 1, 2, 3, mais on doit chercher à part les valeurs des termes correspondant à ces indices.

Dans cette somme entre par exemple comme coefficient de η_0 l'expression suivante:

$$Sv_1 \left[-\frac{\varepsilon_1^2}{4} u_1 + \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3}{8} (u_{\bar{2}} \theta_{\bar{2},1} + u_{\bar{3}} \theta_{\bar{3},1}) \cos \Delta \right]$$
$$+ Sv_{\bar{1}} \left[-\frac{\varepsilon_1^2}{2} u_{\bar{1}} + \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3}{8} (u_2 \theta_{2,\bar{1}} + u_3 \theta_{3,\bar{1}}) \cos \Delta \right],$$

S désignant la somme de l'expression écrite et des deux autres qu'on déduit de celle-là en permutant l'indice 1 avec les indices 2 et 3. Cette somme ne variant pas par permutation de u avec v et de l avec m, on peut conclure comme ci-dessus qu'on aura $a_{12} = a_{21}$. D'une manière analogue on trouvera que $a_{13} = a_{31}$ et $a_{23} = a_{32}$.

De plus on voit facilement que les puissances impaires de α_p s'évanouiront dans les coefficients a.

Le coefficient de $\bar{\xi}_0'$ est

$$S \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3}{8} [u_1 (u_{\bar{2}} \theta_{\bar{2},1} + u_{\bar{3}} \theta_{\bar{3},1}) - u_{\bar{1}} (u_2 \theta_{2,\bar{1}} + u_3 \theta_{3,\bar{1}})] \sin \Delta.$$

Mais cette somme est égale à zéro, et par suite $b_{11} = 0$, et de même $b_{22} = 0$, $b_{33} = 0$.

Enfin le coefficient de $\overline{\eta}'_0$ est égal à

$$S \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3}{8} [v_1(u_2\theta_{\bar{2},1} + u_{\bar{3}}\theta_{\bar{3},1}) - v_{\bar{1}}(u_2\theta_{2,\bar{1}} + u_3\theta_{3,\bar{1}})] \sin \perp.$$

En permutant ici u et v ou l et m, on aura la même valeur absolue, mais le signe contraire, et par suite on aura $b_{12} = -b_{21}$ et d'une manière analogue $b_{13} = -b_{31}$, $b_{23} = -b_{32}$. On peut de plus voir aisément que les coefficients b ne contiendront que des puissances impaires de α_p.

Au moyen des équations (C) et des relations trouvées entre les coefficients a_{11}, a_{12}, ... b_{12}, ..., on reconnaît facilement, en se reportant à la théorie de la polarisation circulaire, que les équations obtenues contiennent complètement cette théorie. Qu'on me permette cependant d'indiquer à grands traits comment on peut l'en déduire.

Nous pouvons, comme ci-dessus, choisir les directions des axes de coordonnées de manière que les équations

$$a_{12} = 0, \quad a_{13} = 0, \quad a_{23} = 0$$

soient satisfaites. Posons alors

$$a_{11} = \frac{\Omega^2}{a^2}, \quad a_{22} = \frac{\Omega^2}{b^2}, \quad a_{33} = \frac{\Omega^2}{c^2},$$
$$b_{23} = \Omega^2 d, \quad b_{31} = \Omega^2 e, \quad b_{12} = \Omega^2 f.$$

Les valeurs des seconds membres des équations (C) sont

$$\omega(\overline{\xi}_0) = \frac{\Omega^2}{s^2}[\overline{\xi}_0 - u(u\overline{\xi}_0 + v\overline{\eta}_0 + w\overline{\zeta}_0)],$$

et les expressions analogues. Après avoir transporté ces valeurs dans les premiers membres des équations (C), nous poserons

$$\frac{1}{a^2}-\frac{1-u^2}{s^2}=c_{11}, \quad \frac{1}{b^2}-\frac{1-v^2}{s^2}=c_{22}, \quad \frac{1}{c^2}-\frac{1-w^2}{s^2}=c_{33},$$

$$\frac{vw}{s^2}=c_{23}=c_{32}, \quad \frac{uw}{s^2}=c_{13}=c_{31}, \quad \frac{uv}{s^2}=c_{12}=c_{21}.$$

Le système des trois équations formées de cette manière peut être complété par un autre qu'on déduit de celui-ci en remplaçant $\overline{\xi_0}$, $\overline{\eta_0}$, $\overline{\zeta_0}$ par $\overline{\xi'_0}$, $\overline{\eta'_0}$, $\overline{\zeta'_0}$ et $\overline{\xi'_0}$, $\overline{\eta'_0}$, $\overline{\zeta'_0}$ par $-\overline{\xi_0}$, $-\overline{\eta_0}$, $-\overline{\zeta_0}$. Les six composantes sont déterminées par ces six équations, et la vitesse s est donnée par l'équation obtenue en égalant à zéro le déterminant

$$\begin{vmatrix} 0 & f & -e & c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ -f & 0 & d & c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ e & -d & 0 & c_{31} & c_{32} & c_{33} \\ -c_{11} & -c_{12} & -c_{13} & 0 & f & -e \\ -c_{21} & -c_{22} & -c_{23} & -f & 0 & d \\ -c_{31} & -c_{32} & -c_{33} & e & -d & 0 \end{vmatrix} = 0. \qquad (18)$$

Ce déterminant est symétrique gauche et peut être identifié avec H^2. En développant H comme à l'ordinaire, on conclut de l'équation $H = 0$* * NOTE 13.

$$c_{11}c_{22}c_{33}+2c_{23}c_{13}c_{12}-c_{11}c_{23}^2-c_{22}c_{13}^2-c_{33}c_{12}^2$$
$$= c_{11}d^2+c_{22}e^2+c_{33}f^2+2c_{23}ef+2c_{13}df+2c_{12}de. \qquad (19)$$

Si d, e, f s'évanouissent, nous retomberons sur l'expression (10) de s déjà obtenue auparavant. En général ces quantités seront petites et du même ordre que α_p.* * NOTE 14.

Par conséquent le second membre de l'équation (19) a une valeur petite, que nous désignerons par q^2; la valeur de s déjà trouvée peut en général être développée suivant les puissances de q^2, et pour cette raison l'accroissement de s sera insensible. Mais ce développement ne peut pas se faire si le premier membre de (19) devient

quadratique ou ne diffère que peu d'un carré parfait, car dans ce cas on peut extraire la racine des deux membres et développer s suivant les puissances de $\pm q$.
* NOTE 15. Tel sera le cas*, si nous faisons $v = 0$ en supposant $a > b > c$ ou $a < b < c$. Le premier membre de l'équation (19) sera alors

$$\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{s^2}\right)\left[\frac{1}{a^2c^2} - \frac{1}{s^2}\left(\frac{u^2}{a^2} + \frac{w^2}{c^2}\right)\right],$$

expression qui sera égale au carré de $\frac{b}{ac}\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{s^2}\right)$, si

$$u^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}, \quad w^2 = \frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}.$$

Si l'on substitue dans le second membre de l'équation (19) la valeur approchée de s, savoir $s = b$, on obtiendra

$$\frac{1}{b^2} - \frac{1}{s^2} = \pm\left(\frac{c^2}{b^2}\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}\,d + \frac{a^2}{b^2}\sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}}\,f\right). \qquad (20)$$

La vitesse s aura donc deux valeurs sensiblement différentes dans le cas où la normale au plan de l'onde coïncide avec l'axe optique du cristal, car les valeurs ci-dessus de u, v, w sont précisément celles des cosinus des angles que fait l'axe optique avec les axes de coordonnées.

Avant de calculer l'amplitude des vibrations, il faut, si nous nous bornons aux valeurs 0 et 2 de l'exposant p dans les formules généralisées de Fresnel, rappeler qu'il n'y aura aucune différence essentielle quelle que soit celle de ces deux valeurs que nous choisissions, le plan de polarisation étant le même dans les deux cas. Mais dans le cas de $p = 2$ les vibrations étant situées dans le plan de l'onde, c'est ce cas qui donnera les résultats les plus simples, et c'est à lui que nous nous bornerons.

En employant les valeurs ci-dessus de u, v, w et les mêmes notations ξ_0, η_0, ζ_0 que précédemment, on aura en vertu des équations (C)

$$\left.\begin{aligned}
\xi_0 &= \frac{1}{a^2}\overline{\xi}_0 + f\overline{\eta}'_0 - e\overline{\zeta}'_0 = \frac{w}{s^2}(w\overline{\xi}_0 - u\overline{\zeta}_0),\\
\eta_0 &= \frac{1}{b^2}\overline{\eta}_0 - f\overline{\xi}'_0 + d\overline{\zeta}'_0 = \frac{1}{s^2}\overline{\eta}_0,\\
\zeta_0 &= \frac{1}{c^2}\overline{\zeta}_0 + c\overline{\xi}'_0 - d\overline{\eta}'_0 = -\frac{u}{s^2}(w\overline{\xi}_0 - u\overline{\zeta}_0),
\end{aligned}\right\} \quad (21)$$

qui peuvent être complétées par trois équations analogues déduites de celles-ci en remplaçant les composantes non accentuées par les composantes accentuées, et les composantes accentuées par les composantes non accentuées ayant le signe contraire.

d, e, f ayant des valeurs petites, on peut remplacer $\overline{\xi}'_0$, $\overline{\eta}'_0$, $\overline{\zeta}'_0$ par leurs valeurs approchées, savoir $\overline{\xi}'_0 = a^2\xi'_0$, $\overline{\eta}'_0 = b^2\eta'_0$, $\overline{\zeta}'_0 = c^2\zeta'_0$, ce qui conduira à l'équation suivante:

$$\frac{s^2}{w}\xi_0 = -\frac{s^2}{u}\zeta_0$$

$$= wa^2(\xi_0 - fb^2\eta'_0 + ec^2\zeta'_0) - uc^2(\zeta_0 - ea^2\xi'_0 + db^2\eta'_0),$$

$$\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{s^2}\right)\eta_0 = -\frac{c^2}{b^2}d\zeta'_0 + \frac{a^2}{b^2}f\xi'_0.$$

De plus nous obtiendrons encore trois équations analogues de la manière indiquée.

On satisfait à toutes ces équations par les valeurs suivantes*: * NOTE 16.

$$\left.\begin{aligned}
\xi_0 &= 0, & \eta_0 &= A, & \zeta_0 &= 0,\\
\xi'_0 &= \pm wA, & \eta'_0 &= 0, & \zeta'_0 &= \mp uA,
\end{aligned}\right\} \quad (22)$$

qui ou bien rendront les équations identiques ou bien donneront de nouveau les équations (20), en supposant

toujours qu'on peut attribuer aux quantités d, e, f des valeurs petites.

Si l'on désigne par r le chemin que l'onde plane a parcouru dans le cristal, les composantes de l'amplitude des vibrations seront déterminées, dans le cas de $p = 2$, par les équations

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \pm uA \sin k\left(t - \frac{r}{s}\right), \\ \eta &= A \cos k\left(t - \frac{r}{s}\right), \\ \zeta &= \mp uA \sin k\left(t - \frac{r}{s}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (23)$$

Le rayon de lumière sera donc décomposé en deux rayons polarisés circulairement qui se propagent avec des vitesses un peu différentes.

Ces vitesses peuvent être déduites de (20), à savoir

$$s_1 = b(1 + \tfrac{1}{2} uc^2 d + \tfrac{1}{2} ua^2 f), \quad s_2 = b(1 - \tfrac{1}{2} uc^2 d - \tfrac{1}{2} ua^2 f),$$

s_1 correspondant au signe supérieur, s_2 au signe inférieur de (23). Dans le dernier cas la polarisation circulaire est orientée de gauche à droite, $\frac{d\eta}{dt}$ et $\frac{\zeta}{u}$ ayant des signes

* NOTE 17. contraires.*

Si les deux rayons ont parcouru le chemin r, le plan de vibration a tourné de l'angle

$$\frac{k}{2}\left(\frac{r}{s_1} - \frac{r}{s_2}\right) = -\frac{kr}{2}(uc^2 d - ua^2 f). \qquad (24)$$

Par conséquent la rotation est proportionnelle au chemin parcouru, elle est dirigée à droite, si d et f sont négatifs. k étant égal à $s\frac{2\pi}{\lambda}$, la rotation sera approximativement proportionnelle à $\frac{1}{\lambda^2}$ ou inversement propor-

* NOTE 18. tionnelle au carré de la longueur d'onde.*

Il est facile de passer du cas général traité ici au cas particulier des corps qui ont un seul axe optique ou qui sont isotropes. A la vérité, la polarisation circulaire ne s'est manifestée que dans ces deux cas spéciaux, mais on ne doit pas désespérer de trouver des cristaux à deux axes qui jouissent de cette propriété, d'autant que le pouvoir rotatoire de plusieurs cristaux à un axe (chlorure de sodium, sulfate de strychnine, cinabre) avait échappé à l'observation jusqu'en ces derniers temps.

Dans la nature la polarisation circulaire n'apparaît que comme un cas particulier; dans le calcul au contraire c'est le cas le plus général. Cela provient de la symétrie générale qui règne dans la nature, et qui fait que la constante Δ est égale à zéro, et par conséquent que les quantités d, e, f s'évanouissent; et même, s'il n'en était pas ainsi, ces dernières quantités seraient composées de termes qui se détruiraient mutuellement par un arrangement complètement symétrique. Pour cette raison la polarisation circulaire implique un défaut de symétrie, qui apparaît dans le calcul comme le cas le plus général, mais dans la nature comme le cas le plus rare.

Comme résultat des recherches précédentes on voit qu'on peut seulement par un développement plus étendu de la partie formelle de la théorie de la lumière, c'est-à-dire des lois de la réfraction et de la réflexion pour les corps isotropes et transparents, sans hypothèses douteuses et précisément en conservant la plus grande généralité, parvenir à une théorie complète de la double réfraction, de la dispersion et de la polarisation circulaire.

On pourrait encore faire un pas en avant sur le chemin suivi dans ce mémoire, et je l'indiquerai en peu de mots. On a supposé que la vitesse de la lumière

est une fonction de x, y, z; mais on peut supposer plus généralement qu'elle est aussi une fonction du temps t, car c'est évidemment faire une restriction que de présumer un équilibre primitif des éléments. On peut aisément introduire cette hypothèse dans les calculs en supposant que les quantités ρ_p ont la valeur

$$\frac{k_p t + a_p x + b_p y + c_p z + d_p}{\alpha_p}.$$

Mais les équations différentielles (A), n'ayant pas été formées dans cette hypothèse, ne peuvent pas servir de fondement sûr aux calculs dans la nouvelle supposition, et il serait alors nécessaire de déduire d'une autre manière les équations différentielles compatibles avec l'hypothèse plus générale.

NOTES.

NOTE 1. Une critique du mémoire se trouve dans les „Fortschritte der Physik“, t. 19, p. 106. 1863.

NOTE 2. On suppose ici que la réflexion ne peut produire aucune différence de phase à l'exception de celle qui est due au changement du signe de l'amplitude.

Cette hypothèse n'est pas indiquée parmi les suppositions préliminaires de Lorenz, quoique elle ne puisse être déduite des hypothèses mentionnées explicitement.

NOTE 3. La direction positive de l'axe des x est tournée vers l'intérieur de la couche réfringente.

NOTE 4. Le mémoire ne dit pas pour quelle raison on peut poser

$$\omega^2\varphi = a\bar{\xi},$$

a étant une constante. Cela peut se voir de la manière suivante.

On aura en vertu de (22)

$$\frac{\partial\bar{\zeta}}{\partial x} = -A_1 e^{(kt-nz)\sqrt{-1}} \frac{\partial\left(\omega\sqrt{\frac{\partial\delta}{\partial x}}s'\right)}{\partial\delta}\frac{d\delta}{dx}$$

$$= -A_1 e^{(kt-nz)\sqrt{-1}} \frac{\partial\,(e^{-u}s')}{\partial\delta}\frac{d\delta}{dx}$$

et par suite, en vertu de l'équation

$$\frac{\partial(e^{-u}s')}{\partial\delta} = -\sqrt{-1}\,e^{-u}s,$$

$$\frac{\partial\bar{\zeta}}{\partial x} = \sqrt{-1}\,A_1 e^{(kt-nz)\sqrt{-1}}\,e^{-u}s\,\frac{d\delta}{dx}$$

$$= \sqrt{-1}\,A_1\omega\frac{d\delta}{dx}\sqrt{\frac{d\delta}{dx}}\,s e^{(kt-nz)\sqrt{-1}} = \frac{\sqrt{-1}}{n}\left(\frac{d\delta}{dx}\right)^2\bar{\xi},$$

$$\bar{\xi} = -\frac{n\sqrt{-1}}{\left(\frac{d\delta}{dx}\right)^2}\frac{\partial\bar{\zeta}}{\partial x} = -n\sqrt{-1}\,\omega^2\varphi.$$

Du reste l'introduction de la fonction auxiliaire φ est tout à fait superflue, ce qu'on peut reconnaître de la manière suivante.

On a

$$-n\sqrt{-1}\,\frac{\partial\bar{\zeta}}{\partial x} = \left(\frac{d\delta}{dx}\right)^2\bar{\xi}$$

et en vertu de (19)

$$\omega^2\left[n^2+\left(\frac{d\delta}{dx}\right)^2\right] = k^2,$$

et par suite l'équation précédente peut s'écrire

$$-n\sqrt{-1}\,\frac{\partial\bar{\zeta}}{\partial x} = \bar{\xi}\,\frac{k^2}{\omega^2}-n^2\bar{\xi},$$

ou

$$\frac{\partial^2\bar{\zeta}}{\partial x\,\partial z} = -\frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2\bar{\xi}}{\partial t^2}+\frac{\partial^2\bar{\xi}}{\partial z^2},$$

équation qui est identique avec (30).

L'équation (21) peut s'écrire sous la forme

$$\frac{\bar{\xi}}{\omega^2} = \frac{A_1 ns}{\omega\sqrt{\frac{d\delta}{dx}}}\,e^{(kt-nz)\sqrt{-1}} = A_1 n e^{(kt-nz)\sqrt{-1}}\,e^{u}s,$$

et on obtiendra par différentiation, en vertu de l'équation $\frac{d(e^{u}s)}{d\delta} = -\sqrt{-1}\,e^{u}s'$,

$$\frac{\partial \frac{\bar{\xi}}{\omega^2}}{\partial x} = -\sqrt{-1}\, A_1 n e^{(kt-nz)\sqrt{-1}}\, e^u s' \frac{d\delta}{dx}$$

$$= \frac{+\sqrt{-1}\, n\, \bar{\zeta}}{\omega^2}.$$

Mais, en remplaçant $\frac{\bar{\xi}}{\omega^2}$ par

$$\frac{n^2\bar{\xi} - n\sqrt{-1}\frac{d\bar{\zeta}}{dx}}{k^2},$$

on aura

$$\frac{\partial^2 \bar{\zeta}}{\partial x^2} + n\sqrt{-1}\frac{\partial \bar{\xi}}{\partial x} = -\frac{k^2}{\omega^2}\bar{\zeta},$$

ou

$$\frac{\partial^2 \bar{\zeta}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \bar{\xi}}{\partial x\, \partial z} = \frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2 \bar{\zeta}}{\partial t^2},$$

ce qui est précisément l'équation (31).

L'équation

$$\frac{\partial \frac{\bar{\xi}}{\omega^2}}{\partial x} = \frac{n\sqrt{-1}\,\bar{\zeta}}{\omega^2}$$

montre que

$$\frac{\partial \bar{\xi}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial z} = 0$$

si ω^2 est une constante.

NOTE 5. Dans ce qui suit, on suppose que la série (2) est très convergente et qu'il suffit par suite de conserver les deux premiers termes en négligeant tout le reste. Il serait très difficile de démontrer la légitimité de cette supposition.

NOTE 6. On aura en vertu des équations (9)

$$\frac{\xi_0(a^2-s^2)}{a^2u} = \frac{\eta_0(b^2-s^2)}{b^2v} = \frac{\zeta_0(c^2-s^2)}{c^2w} = u\bar{\xi}_0 + v\bar{\eta}_0 + w\bar{\zeta}_0$$

ou

$$\frac{\bar{\xi}_0}{\left(\frac{a^2u}{a^2-s^2}\right)} = \frac{\bar{\eta}_0}{\left(\frac{b^2v}{b^2-s^2}\right)} = \frac{\bar{\zeta}_0}{\left(\frac{c^2w}{c^2-s^2}\right)} = \frac{u\bar{\xi}_0+v\bar{\eta}_0+w\bar{\zeta}_0}{\frac{a^2u^2}{a^2-s^2}+\frac{b^2v^2}{b^2-s^2}+\frac{c^2w^2}{c^2-s^2}}$$

$$= \frac{u\bar{\xi}_0+v\bar{\eta}_0+w\bar{\zeta}_0}{1},$$

et par conséquent

$$\frac{a^2u^2}{a^2-s^2}+\frac{b^2v^2}{b^2-s^2}+\frac{c^2w^2}{c^2-s^2} = 1,$$

équation qui est identique à l'équation (10) du mémoire.

NOTE 7. On sait que l'équation de la surface des ondes est

$$\frac{a^2x^2}{r^2-a^2}+\frac{b^2y^2}{r^2-b^2}+\frac{c^2z^2}{r^2-c^2} = 0,$$

où $r^2 = x^2+y^2+z^2$, et qu'on a

$$\frac{x}{r^2-a^2} = \frac{su}{s^2-a^2}$$

et les équations analogues.

Il faut démontrer que

$$x\xi_0+y\eta_0+z\zeta_0 = 0.$$

Or on a (voir note 6)

$$\frac{\xi_0}{\left(\frac{a^2u}{a^2-s^2}\right)} = \frac{\eta_0}{\left(\frac{b^2v}{b^2-s^2}\right)} = \frac{\zeta_0}{\left(\frac{c^2w}{c^2-s^2}\right)} = u\xi_0+v\eta_0+w\zeta_0 = -f$$

et par suite

$$\xi_0 = \frac{fa^2}{s}\frac{x}{r^2-a^2}$$

et les équations analogues, d'où

$$x\xi_0 + y\eta_0 + z\zeta_0 = \frac{f}{s}\left(\frac{a^2x^2}{r^2-a^2} + \frac{b^2y^2}{r^2-b^2} + \frac{c^2z^2}{r^2-c^2}\right) = 0.$$

(Voir Mascart, Traité d'optique, t. I, p. 564—565.)

NOTE 8. Dans toute cette partie du mémoire il est extrèmement difficile de voir l'ordre de grandeur des termes, et parfois il me semble que l'ordre des termes négligés est le même que celui des termes conservés.

NOTE 9. La démonstration est faite dans ce qui suit.

NOTE 10. On fait ici la supposition que les coefficients a contiennent des termes indépendants de α_p et que les termes b contiennent α_p au premier degré.

NOTE 11. Dans ce qui suit on suppose que la formule (12) ne contient pas de termes de la forme

$$\xi(\rho_1+\rho_2)\,C(\rho_1+\rho_2)$$

et les termes analogues, de tels termes étant, en vertu de la relation $\rho_1+\rho_2 = \varDelta-\rho_3$, contenus dans les termes de la forme

$$\xi(-\rho_3)\,C(-\rho_3)\,,\quad \xi'(-\rho_3)\,S(-\rho_3)$$

et les termes analogues.

NOTE 12. Le calcul est fait en supposant que $\frac{\varepsilon_p}{2}\bar{\xi}_0$ peut être négligé; mais la légitimité de cette supposition est très douteuse par la raison qu'on ne sait pas l'ordre du terme négligé.

NOTE 13. Le déterminant (18) est symétrique gauche et doit pour cette raison être égal au carré d'un polynôme entier. Nous allons chercher ce polynôme. Le déter-

minant (18) est une fonction du second degré de c_{11} et peut être écrit sous la forme

$$D = (Ac_{11} + B)^2 = H^2,$$

A et B étant des polynômes entiers.

Par conséquent on aura

$$\frac{\partial D}{\partial c_{11}} = 2A(Ac_{11} + B),$$

$$H = \frac{1}{2A}\frac{\partial D}{\partial c_{11}}.$$

Mais on trouve facilement le polynôme A. En effet on a

$$A^2 = \begin{vmatrix} 0 & d & c_{22} & c_{23} \\ -d & 0 & c_{23} & c_{33} \\ -c_{22} & -c_{23} & 0 & d \\ -c_{23} & -c_{33} & -d & 0 \end{vmatrix} = (d^2 + c_{32}^2 - c_{22}c_{33})^2.$$

Ayant obtenu A, on aura

$$H = \frac{\frac{\partial D}{\partial c_{11}}}{2A} = -\frac{\begin{vmatrix} -f & 0 & d & c_{22} & c_{23} \\ e & -d & 0 & c_{23} & c_{33} \\ -c_{11} & -c_{12} & -c_{13} & f & -e \\ -c_{21} & -c_{22} & -c_{23} & 0 & d \\ -c_{31} & -c_{32} & -c_{33} & -d & 0 \end{vmatrix}}{(d^2 + c_{32}^2 - c_{22}c_{33})}.$$

On peut remarquer que D est du quatrième degré par rapport à d, e, f, et que par conséquent H est du second degré par rapport aux mêmes lettres. En faisant une substitution circulaire sur les lettres d, e, f et sur les indices 1, 2, 3, D ne variera pas, et par conséquent cette substitution ne changera pas la valeur de H. Si donc nous connaissions les termes qui contiennent c_{11}, c_{12}, ... e, f, on pourrait en conclure aisément les termes qui con-

tiennent d. Mais les termes contenant c_{11}, c_{12}, ... se trouvent en posant $d = 0$ et seront égaux à

$$-\frac{\begin{vmatrix} f & 0 & 0 & c_{23} & c_{33} \\ e & 0 & 0 & c_{22} & c_{23} \\ -c_{11} & -c_{12} & -c_{13} & f & -e \\ -c_{21} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 \\ -c_{31} & c_{32} & -c_{33} & 0 & 0 \end{vmatrix}}{c_{23}^2 - c_{22}c_{33}} = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} \; 2efc_{23} - e^2c_{22} - f^2c_{23},$$

d'où l'on peut facilement déduire l'expression de H trouvée dans le mémoire.

NOTE 14. Les quantités d, e, f sont des fonctions impaires de a_p, parce qu'il en est ainsi de b_{23}, ...; et on peut en général supposer qu'elles sont du premier ordre.

Mais il faut de plus remarquer que les quantités a_{11}, a_{22}, a_{33} sont des fonctions du second degré de ε_p, que b_{12}, ... sont des fonctions du troisième ordre des mêmes quantités, et que pour cette raison les quantités d, e, f sont petites aussi en comparaison de c_{11}, ...

NOTE 15. On voit aisément que les quantités u, v, w auront les valeurs citées dans le mémoire, si le premier membre de l'équation (19) est un carré parfait; car on aura, en égalant à zero ce premier membre,

$$D = \begin{vmatrix} \frac{u^2}{s^2} - \left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{a^2}\right) & \frac{uv}{s^2} & \frac{uw}{s^2} \\ \frac{uv}{s^2} & \frac{v^2}{s^2} - \left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{b^2}\right) & \frac{vw}{s^2} \\ \frac{uw}{s^2} & \frac{vw}{s^2} & \frac{w^2}{s^2} - \left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{c^2}\right) \end{vmatrix}$$

$$= -\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{a^2}\right)\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{b^2}\right)\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{c^2}\right) + \left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{c^2}\right)\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{b^2}\right)\frac{u^2}{s^2}$$

$$+ \left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{a^2}\right)\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{c^2}\right)\frac{v^2}{s^2} + \left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{b^2}\right)\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{a^2}\right)\frac{w^2}{s^2} = 0.$$

En multipliant les éléments des lignes horizontales par x, y, z, et en ajoutant les éléments des deux dernières lignes à ceux de la première, on peut déterminer y et z de manière que les deux premiers éléments de la première ligne s'évanouissent. Le troisième élément s'évanouira alors aussi, et l'on aura

$$x\left[\frac{u^2}{s^2}-\left(\frac{1}{s^2}-\frac{1}{a^2}\right)\right]+y\frac{uv}{s^2}+\frac{zuw}{s^2}=0,$$
$$\frac{xuv}{s^2}+y\left[\frac{v^2}{s^2}-\left(\frac{1}{s^2}-\frac{1}{b^2}\right)\right]+\frac{zvw}{s^2}=0,$$
$$x\frac{uw}{s^3}+y\frac{vw}{s^2}+z\left[\frac{w^2}{s^2}-\left(\frac{1}{s^2}-\frac{1}{c^2}\right)\right]=0.$$

Mais ces équations peuvent s'écrire

$$\frac{x\left(\frac{1}{s^2}-\frac{1}{a^2}\right)}{u}=\frac{y\left(\frac{1}{s^2}-\frac{1}{b^2}\right)}{v}=\frac{z\left(\frac{1}{s^2}-\frac{1}{c^2}\right)}{w}=\frac{ux+vy+wz}{s^2},$$

d'où l'on déduira

$$\frac{u^2}{s^2-a^2}+\frac{v^2}{s^2-b^2}+\frac{w^2}{s^2-c^2}=0.$$

Les valeurs de u, v, w qui rendent D carré parfait sont donc les mêmes que celles pour lesquelles cette dernière équation a une racine double; mais, comme on sait, ceci n'a lieu que dans le cas mentionné dans le mémoire.

NOTE **16**. Les formules (22) ne donnent qu'une solution particulière des équations précédentes. En vertu de l'équation

$$\frac{s^2}{w}\xi'_0=-\frac{s^2}{u}\zeta'_0 \quad \text{ou} \quad u\xi'_0+w\zeta'_0=0,$$

les deux premières équations peuvent s'écrire

$$\frac{s^2}{u}\xi_0 = -\frac{s^2}{u}\zeta_0 = ua^2(\xi_0 + fb^2\eta'_0) = uc^2(\zeta_0 + db^2\eta'_0).$$

Ces équations, jointes à

$$\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{s^2}\right)\eta'_0 = \frac{c^2}{b^2}d\zeta_0 - \frac{a^2}{b^2}f\xi_0,$$

forment un système de trois équations qui ne contiennent que les inconnues

$$\xi_0,\ \zeta_0,\ \eta'_0.$$

Les équations complémentaires qu'on en déduit en changeant ξ_0, η_0, ζ_0 en ξ'_0, η'_0, ζ'_0 et ξ'_0, η'_0, ζ'_0 en $-\xi_0$, $-\eta_0$, $-\zeta_0$ ne contiendront donc que ξ'_0, ζ'_0, η_0.

Ces dernières équations déterminent ξ'_0, ζ'_0, η_0 de la manière indiquée dans le mémoire, si l'on suppose $\eta_0 = A$.

Mais, d'une manière analogue, les trois premières équations donneront

$$\xi_0 = -uB, \quad \zeta_0 = +uB$$

si nous supposons $\eta'_0 = B$.

La solution complète est donc, A et B étant des quantités arbitraires,

$$\begin{aligned} \xi_0 &= -uB, & \eta_0 &= A, & \zeta_0 &= +uB, \\ \xi'_0 &= uA, & \eta'_0 &= B, & \zeta'_0 &= -uA. \end{aligned}$$

Les équations (23) seront donc remplacées par

$$\xi = u\left(-B\cos k\left(t-\frac{r}{s}\right) + A\sin k\left(t-\frac{r}{s}\right)\right),$$

$$\eta = A\cos k\left(t-\frac{r}{s}\right) + B\sin k\left(t-\frac{r}{s}\right),$$

$$\zeta = u\left(B\cos k\left(t-\frac{r}{s}\right) - A\sin k\left(t-\frac{r}{s}\right)\right).$$

Mais, en posant $A = R\cos\varphi$, $B = R\sin\varphi$, on aura

$$\xi = \pm Rw \sin k\left(t - \frac{r}{s} - \varphi\right),$$

$$\eta = R\cos k\left(t - \frac{r}{s} - \varphi\right),$$

$$\zeta = \mp Ru \sin k\left(t - \frac{r}{s} - \varphi\right),$$

par où l'on voit que la solution complète donnera aussi les équations (23), si l'on ajoute une différence constante de phase.

NOTE 17. Il faut supposer que le système des coordonnées est choisi de manière que la direction positive de rotation dans le plan des yz est la même que la direction des aiguilles d'une montre.

NOTE 18. Les coefficients b_{11}, ... et par conséquent aussi d, e, f sont des fonctions impaires de a_p et, comme on voit, aussi de l, m, n. Le terme du plus petit ordre est en général du premier ordre par rapport à l, m, n, d'où l'on voit que la conclusion du mémoire s'ensuit.



SUR LA THÉORIE DE LA LUMIÈRE.

SUR LA THEORIE DE LA LUMIERE.*

* NOTE 1.

POGG. ANN. T. CXXI, P. 579—600.
PHIL. MAGAZ. (4) XXVIII, P. 409—425.

Dans un mémoire précédent (Pogg. Ann., t. 118; quatrième mémoire de cette édition), j'ai fait connaître quelques recherches théoriques, que j'ai poursuivies depuis en leur donnant un développement plus étendu. Mais avant que j'entre dans les détails des résultats obtenus, qu'il me soit permis de faire quelques remarques sur les traits fondamentaux de la théorie que j'expose et sur les caractères qui la distinguent des autres théories.

Les recherches faites dans le domaine de la physique mathématique témoignent presque toutes de la foi des auteurs dans le pouvoir de l'induction, et de la ferme confiance qu'on peut par ce moyen pénétrer jusqu'aux forces cachées dans l'intérieur des corps et partir ensuite de là pour expliquer les lois des phénomènes. C'est la voie qu'ont suivie Laplace et les savants de son école. On a cru qu'on pouvait grâce à l'induction saisir l'essence même des phénomènes qui font l'objet de la physique mathématique comme de ceux qui relèvent de l'astronomie. Partout on a pris pour point de départ la supposition de forces moléculaires, qui comme les forces de l'attraction universelle seraient une fonction des distances

mutuelles des molécules, proportionnelles à leur masse et agissant dans la direction de la ligne qui les joint. On ne s'est guère rendu compte du nombre des hypothèses que cette supposition implique; mais la largeur du fondement qu'on a choisi pour y construire toute espèce d'édifices est suffisamment démontrée par les conséquences analytiques qui en ont été tirées de nos jours.

On peut se demander si ces hypothèses sur la nature des forces moléculaires ont amené à des conséquences qu'on n'ait pu déduire d'aucune autre manière et si ces conséquences ont été toujours admissibles.

La théorie de la capillarité peut être établie sans faire ces hypothèses, et le résultat unique de celles-ci est le théorème de Laplace et de Poisson, d'après lequel la hauteur des liquides dans les tubes capillaires est proportionnelle à la densité des liquides. Mais ce théorème est inexact.

Dans la théorie de l'élasticité, Poisson a été conduit par la même hypothèse à la détermination des deux constantes d'élasticité; mais il est aussi démontré que cette conclusion n'est pas admissible. On a modifié les calculs de Poisson et voilé leurs dernières conséquences dans une formule de somme non sommée; mais peut-on inférer d'un tel résultat la légitimité des suppositions admises?

Dans la théorie de la lumière, la même hypothèse a dans la main de Cauchy amené à des résultats merveilleux. A l'origine elle a servi à l'explication de la dispersion de la lumière; mais on reconnut tout de suite qu'alors l'espace vide devait aussi disperser la lumière, à moins qu'on ne fît une certaine supposition sur la nature

des forces comme fonction des distances. On pourrait croire qu'on aurait été conduit par cette connaissance si importante de la nature des forces moléculaires à des conclusions nouvelles: en réalité il n'en fut pas ainsi. Au contraire il s'est produit ici un fait qui s'est répété ailleurs, par exemple dans les hypothèses qu'il était nécessaire d'ajouter pour l'explication de la double réfraction: on a reconnu qu'on ne pouvait se servir des suppositions nouvelles qu'à l'endroit même où elles étaient introduites; on ne pouvait pas en déduire d'autres conséquences. Mais je ne m'arrêterai pas à toutes ces objections, par la raison qu'elles ont déjà été faites auparavant, et n'ont pourtant pas pu renverser la théorie. Elles n'ont toutes qu'une certaine probabilité, et contre elles se lèvent tous les résultats importants qui jusqu'ici ont été déduits de la théorie.

Au contraire je m'arrêterai un instant à une objection nouvelle, parce qu'elle renverse en effet la théorie, tandis que les grands résultats de celle-ci ne sont pourtant pas d'une nature telle qu'ils ne puissent être atteints par une voie nouvelle et d'une manière bien plus complète, comme je le montrerai.

Le fait de la polarisation circulaire a forcé Cauchy à faire l'hypothèse d'une périodicité dans la constitution intérieure des corps. A cela on ne peut faire aucune objection, car une telle hétérogénéité est précisément le cas le plus général, l'homogénéité étant au contraire un cas particulier. Mais Cauchy a commis l'erreur essentielle de supposer que la moyenne des déplacements des molécules de l'éther ne dépend approximativement que des moyennes des coefficients de ses équations différen-

tielles. On peut facilement mettre en défaut ce théorème par un simple exemple.

Comme tel on peut se servir de l'équation différentielle

$$\left(a + b \cos\frac{x}{\alpha}\right)\frac{d\varphi}{dx} + \varphi = 0,$$

où l'on suppose que a est plus grand que b et que α a une très petite valeur. La moyenne du coefficient périodique $a + b\cos\frac{x}{\alpha}$ est égale à a, et d'après le théorème cité ci-dessus la moyenne de l'intégrale serait approximativement

$$\varphi = e^{c - \frac{x}{a}}.$$

Mais ce résultat est faux, car on obtient exactement par intégration

$$\varphi = e^{c - \int \frac{dx}{a + b\cos\frac{x}{\alpha}}},$$

et approximativement, si α est très petit,

* NOTE 2. $$\varphi = e^{c - \frac{x}{\sqrt{a^2 - b^2}}},\ *$$

valeur qui diffère essentiellement de la valeur précédemment citée, puisqu'elle dépend aussi de la constante de périodicité.

Le théorème n'est donc pas admissible en général, et en particulier il ne l'est pas dans le cas de l'équation différentielle de Cauchy. Car premièrement ce n'est pas seulement la polarisation circulaire, mais aussi la double réfraction qui doit être une conséquence de la périodicité des coefficients des équations, si celles-ci sont admissibles. Pour le démontrer, il n'est pas nécessaire que nous nous perdions dans des calculs sans fin, car la nature

elle-même a fait le calcul. Brewster et plus récemment M. Schultze (Verhandl. d. rheinl. Gesellsch. 1861) ont, comme on sait, montré que *des corps disposés en couches minces sont doublement réfringents.*

Par ce fait il devient manifeste qu'une périodicité dans la structure intérieure des corps doit entraîner la double réfraction. En second lieu on voit immédiatement que l'épaisseur des couches d'un corps hétérogène doit influencer la marche des rayons lumineux d'une manière dépendant de la longueur d'onde, et que par conséquent la dispersion tout au moins peut être déduite de la périodicité des coefficients, quelles que soient d'ailleurs les équations différentielles qui servent de fondement à notre théorie. On voit de plus d'une manière simple, par cette explication de la dispersion, par quelle raison elle est liée aux corps et n'a pas lieu dans le vide.

Mais si d'un côté la supposition d'une périodicité dans l'intérieur des corps est nécessaire pour édifier la théorie et si d'autre part elle implique dans ses conséquences non seulement l'explication de la polarisation circulaire, par laquelle on a été forcé de faire cette supposition, mais aussi celle de la double réfraction et de la dispersion, qui avait donné naissance à l'hypothèse fondamentale de la force moléculaire, cette dernière hypothèse devient tout à fait superflue, et une hypothèse qui est superflue est fausse. Tout cet appareil d'hypothèses ne sera qu'un complément arbitraire de la théorie, dans le cas où tout peut être expliqué par la seule supposition de la périodicité.

Ainsi dans l'optique, comme dans les autres branches de la physique mathématique, nous nous voyons forcés d'abandonner les idées ordinaires sur la nature

des forces moléculaires. Il serait très peu utile de chercher à construire la théorie de la lumière au moyen de nouvelles théories physiques, à l'aide de suppositions nouvelles sur les phénomènes qui se passent à l'intérieur des corps, phénomènes dont il est peut-être impossible de se faire aucune idée. La science de notre temps prend en tout une direction nouvelle et cherche à se débarrasser de toutes ces idées qui ressemblent à des feux follets et ne sont peut-être pas des guides meilleurs que ne le furent autrefois les idées qui régnaient du temps de Bacon.

Dans la théorie de la lumière nous n'avons pas besoin d'autres quantités que de celles qui peuvent être observées directement ou indirectement. Ces quantités sont l'intensité, la vitesse, la direction de la propagation, la couleur, la phase et enfin la position du plan de polarisation. La lumière ne fait pas, comme on sait, une impression instantanée sur notre œil, et l'intensité mesurée est par conséquent une moyenne ou la somme de toutes les impressions pendant un petit intervalle de temps; mais si nous supposions l'œil capable d'observer l'intensité à chaque instant particulier et en chaque point de l'espace, il pourrait déterminer non seulement l'intensité moyenne, mais aussi la vitesse, la direction de propagation, la couleur et la phase, car toute variation de ces quantités modifierait l'impression.

Pour cette raison nous pouvons embrasser toutes ces quantités dans une seule notion, celle de l'intensité dans un sens étendu. Mais outre cette fonction du temps et des coordonnées de l'espace, nous avons encore besoin, de deux fonctions nouvelles, et de deux seulement, pour déterminer la position du plan de polarisation; la lumière est donc

complètement déterminée à chaque moment et en chaque point de l'espace par trois quantités dépendant du temps t et des coordonnées x, y, z du point.

Le problème à résoudre est maintenant de trouver trois équations aux dérivées partielles valables pour tous les milieux et qui expriment la dépendance mutuelle des trois quantités en question, fonctions des variables x, y, z, t. De ces équations on devra pouvoir déduire tous les phénomènes de la lumière, ceux seulement exceptés qui dépendent de forces inconnues comme les forces électriques ou chimiques. De ces phénomènes on ne peut au contraire déduire que les équations fondamentales et non une théorie physique; on pourrait aussi bien chercher une telle théorie dans la réflexion par un miroir concave ou dans la réfraction par une lentille que dans la diffraction, la double réfraction, etc. Au contraire l'explication est peut-être cachée dans les forces inconnues dont nous venons de parler.

Si nous cherchons les trois équations aux dérivées partielles qui doivent servir de point de départ à notre théorie, il est évident qu'on ne peut y introduire immédiatement l'intensité et la position du plan de polarisation, mais que celles-ci doivent être remplacées par trois quantités auxiliaires dépendant des premières. Soient ξ, η, ζ ces quantités auxiliaires, que nous appellerons simplement les composantes de la lumière. Je ne m'arrêterai pas sur la méthode ou sur la manière dont les trois équations ont été déduites dans le mémoire qui précède, car ces équations une fois trouvées, la manière dont elles l'ont été sera presque sans intérêt; l'admissibilité des équations sera démontrée par le fait qu'elles peuvent expliquer tous les phénomènes de la lumière, ceux exceptés qui

dépendent de forces inconnues. Ces équations seront, sous une forme un peu modifiée et en omettant les traits horizontaux* sur les composantes,

* NOTE 3.

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}-\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}-\frac{\partial \xi}{\partial z}\right)&=\frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}\\ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \eta}{\partial z}-\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}-\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)&=\frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}\\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}-\frac{\partial \xi}{\partial z}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \eta}{\partial z}-\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)&=\frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}\end{aligned}\right\}\quad (A)$$

Ces équations doivent être complétées par deux autres qui expriment les relations de l'intensité et de la position du plan de polarisation avec les composantes ξ, η, ζ, l'intensité I étant exprimée par

$$I=\frac{1}{\omega^2}(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)$$

et l'équation du plan de polarisation étant

$$\xi(x'-x)+\eta(y'-y)+\zeta(z'-z)=0,$$

où x', y', z' désignent les coordonnées courantes de ce plan. Les composantes sont donc proportionnelles aux cosinus des angles que fait la normale au plan de polarisation avec les trois axes de coordonnées.

La quantité ω est une fonction de x, y, z, qui pour un milieu homogène se réduit à une constante. Dans ce cas les équations prendront une forme simple bien connue, et on peut de ces équations déduire les lois connues de la lumière dans les milieux homogènes, ainsi que les lois de la diffraction (pourvu qu'elle ne soit pas compliquée d'une réflexion et d'une réfraction simultanées), celles des l'interférence et de la polarisation du rayon diffracté et celle de la diminution de l'intensité

de la lumière émanée d'un point lumineux en raison du carré de la distance. Il n'est pas nécessaire que je m'arrête ici sur la manière dont ces lois peuvent être déduites des équations bien connues, et je regarderai comme un fait connu et démontré que ces équations sont admissibles pour les milieux homogènes. Il résulte de la forme des intégrales que la lumière peut être regardée comme un mouvement ondulatoire, mais qu'on ne peut pourtant se former aucune idée exacte de ce mouvement, ce que rendent manifeste les développements précédents. Les intégrales montrent de plus que ω est la vitesse de propagation.

Si nous passons à l'étude des corps hétérogènes, on voit aussitôt qu'un certain arbitraire s'attache à la détermination des notions de l'intensité et du plan de polarisation par la raison qu'elles ne peuvent pas être déterminées par des expériences. En conséquence on a fixé arbitrairement le plan de polarisation comme pour les milieux homogènes, tandis que l'intensité est déterminée par la condition que la somme des intensités totales de la lumière réfractée et réfléchie soit égale à l'intensité de la lumière incidente, si le corps réfringent est parfaitement transparent et homogène. Qu'un tel corps se rencontre en effet dans la nature, c'est ce qui est ici tout à fait indifférent. Pour parvenir à ce résultat, on pourrait, comme nous l'avons fait dans le précédent mémoire, multiplier les composantes par une puissance arbitraire de ω et déterminer ensuite cette puissance par la condition exprimée ci-dessus; mais on verra tout de suite qu'on a déjà satisfait à cette condition par l'équation de l'intensité donnée plus haut.

Dans le précédent mémoire j'ai déduit des équations

différentielles les lois de la double réfraction, de la polarisation circulaire et de la dispersion; de plus j'ai montré par l'intégration de ces équations quels sont les principes qu'il faut appliquer pour calculer la réflexion et la réfraction, car j'ai trouvé que les quatre quantités

$$\eta, \quad \zeta, \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial z}$$

doivent être égales des deux côtés du plan des coordonnées yz, que nous prenons pour plan de séparation des deux milieux. Avant de chercher à développer les conséquences des résultats déjà obtenus, je démontrerai, comment on peut déduire des conditions susdites relatives au plan de séparation une théorie de la réflexion et de la réfraction qui concorde avec l'expérience. Neumann a, comme on sait, traité ce problème d'une manière très complète dans ses travaux classique sur la réflexion et la réfraction de la lumière, et les résultats de ses calculs ont toujours été confirmés par l'expérience. Cependant ses suppositions semblent au premier coup d'œil tout à fait contraires aux nôtres: pour lui les vibrations de la lumière sont situées dans le plan de polarisation et dans le plan de l'onde, l'intensité de la lumière est mesurée par le carré de l'amplitude, et enfin les quatre conditions qu'il obtient pour le plan de séparation sont toutes différentes de celles que nous avons posées. Mais si nous faisons abstraction du sens physique qu'il a donné aux composantes de la lumière, on verra aussitôt qu'il s'est servi de quantités auxiliaires différentes des nôtres. Soient ξ', η', ζ' les composantes de Neumann; nous allons chercher les relations qui existent entre ces composantes et les nôtres.

On a démontré dans le précédent mémoire qu'on peut développer les composantes ξ, η, ζ en séries de termes qui contiennent un facteur variable de la forme

$$\cos(kt - lx - my - nz - \Delta),$$

k, l, m, n étant des constantes, Δ étant au contraire en général une fonction de x, y, z, qui n'est remplacée par une constante que dans le premier terme de la série. La partie de ces séries qui dépend d'un Δ variable représente un mouvement périodique, qui varie avec la périodicité de la structure du corps. L'autre partie des composantes, que nous désignerons par ξ_s, η_s, ζ_s, représente au contraire le vrai mouvement perceptible, qui se propage en ondes planes.

En vertu des équations différentielles (A), on aura

$$\frac{k^2}{\omega^2}\xi = m(m\xi_s - l\eta_s) - n(l\zeta_s - n\xi_s) + \ldots$$

les termes suivants ne contenant que l'autre partie des composantes. En multipliant par ξ, on peut en déduire l'équation suivante

$$\frac{k^2}{\omega^2}\xi^2 = m\xi_s(m\xi_s - l\eta_s) - n\xi_s(l\zeta_s - n\xi_s) + \ldots$$

L'intensité de la lumière perceptible, que nous désignerons par I_s, est la partie de l'expression $\frac{1}{\omega^2}(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)$ qui ne dépend que d'un Δ constant; on trouvera aisément qu'elle est déterminée par l'équation

$$I_s = \frac{1}{k^2}\left[(n\eta_s - m\zeta_s)^2 + (l\zeta_s - n\xi_s)^2 + (m\xi_s - l\eta_s)^2\right].$$

Si la même quantité est exprimée par les composantes de Neumann, nous obtiendrons

$$I_s = \xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2.$$

D'autre part on sait que ξ_s, η_s, ζ_s sont proportionnels aux cosinus des angles que fait la normale au plan de polarisation de la lumière perceptible avec les axes de coordonnées et que les composantes de Neumann sont au contraire situées dans ce plan. Par suite on aura

$$\xi_s\xi' + \eta_s\eta' + \zeta_s\zeta' = 0.$$

De plus la dernière résultante est située dans le plan de l'onde, d'où l'on peut déduire

$$l\xi' + m\eta' + n\zeta' = 0.$$

De ces équations résulteront les relations suivantes entre les deux sortes de composantes

$$k\xi' = n\eta_s - m\zeta_s, \quad k\eta' = l\zeta_s - n\xi_s, \quad k\zeta' = m\xi_s - l\eta_s,$$

équations que nous pourrons aussi écrire sous la forme

* NOTE 4. $$\frac{\partial\xi'}{\partial t} = \frac{\partial\eta_s}{\partial z} - \frac{\partial\zeta_s}{\partial y}, \quad \frac{\partial\eta'}{\partial t} = \frac{\partial\zeta_s}{\partial x} - \frac{\partial\xi_s}{\partial z}, \quad \frac{\partial\zeta'}{\partial t} = \frac{\partial\xi_s}{\partial y} - \frac{\partial\eta_s}{\partial x}. \; *$$

Nos conditions relatives au plan de séparation, qui peuvent s'écrire de la manière suivante

$$\Big[\eta_s\Big]_{x=0}^{x=\varepsilon} = 0, \quad \Big[\zeta_s\Big]_{s=0}^{s=\varepsilon} = 0, \quad \left[\frac{\partial\eta_s}{\partial x} - \frac{\partial\xi_s}{\partial y}\right]_{s=0}^{s=\varepsilon} = 0, \quad \left[\frac{\partial\zeta_s}{\partial x} - \frac{\partial\xi_s}{\partial z}\right]_{x=0}^{x=\varepsilon} = 0,$$

ε ayant une valeur infiniment petite, seront maintenant exprimées au moyen des nouvelles composantes.

Des deux dernières équations il suit immédiatement que

$$\Big[\eta'\Big]_{x=0}^{x=\varepsilon} = 0 \quad \text{et} \quad \Big[\zeta'\Big]_{x=0}^{x=\varepsilon} = 0.$$

Des deux premières équations on peut déduire

$$\left[\frac{\partial \eta_s}{\partial z} - \frac{\partial \zeta_s}{\partial y}\right]_{x=0}^{x=\varepsilon} = 0,$$

et par conséquent on aura

$$\left[\xi\right]_{x=0}^{x=\varepsilon} = 0.$$

Les trois composantes auront donc les mêmes valeurs des deux côtés du plan de séparation des deux milieux, ce qui est en pleine concordance avec les suppositions préliminaires de Neumann.

La quatrième condition relative au plan de séparation, que nous pouvons exprimer au moyen de nos composantes sous la forme

$$\left[m\eta_s + n\zeta_s\right]_{x=0}^{x=\varepsilon} = 0, *$$ * NOTE 5.

peut être exprimée à l'aide des nouvelles composantes de la manière suivante.

Nous désignerons par q l'angle que fait la normale au plan de l'onde avec le rayon de lumière. Cet angle étant le même que celui que fait notre résultante avec le plan de l'onde, on aura, comme nous l'avons démontré dans le mémoire precédent,* * NOTE 6.

$$\sin q = \pm \frac{l\xi_s + m\eta_s + n\zeta_s}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}\sqrt{\xi_s^2 + \eta_s^2 + \zeta_s^2}},$$

d'où il suit que

$$\operatorname{tg} q = \pm \frac{l\xi_s + m\eta_s + n\zeta_s}{\sqrt{(n\eta_s - m\zeta_s)^2 + (l\zeta_s - n\xi_s)^2 + (m\xi_s - l\eta_s)^2}}.$$

Des expressions ci-dessus de η' et ζ' on peut de plus déduire

$$k(n\eta'-m\zeta') = l(m\eta_s+n\zeta_s)-(m^2+n^2)\xi_s.$$

Si nous éliminons ξ_s entre ces deux équations après avoir remplacé le dénominateur de la première par $k\sqrt{\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2}$, nous obtiendrons

$$m\eta_s+n\zeta_s = \frac{k}{l^2+m^2+n^2}\left[l(n\eta'-m\zeta')\pm(m^2+n^2)\operatorname{tg} q\sqrt{\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2}\right],$$

et cette expression aura par conséquent les mêmes valeurs des deux côtés du plan de séparation.

Si nous introduisons les notations de Neumann, et si nous désignons comme lui par φ l'angle que fait le plan de l'onde avec le plan réfringent (plan des yz) et par ψ l'angle que fait la nouvelle résultante avec l'intersection du plan de l'onde et du plan réfringent, nous aurons

$$\frac{l}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}} = \cos\varphi,$$

$$n\eta'-m\zeta' = \pm\cos\psi\sqrt{n^2+m^2}\sqrt{\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2}.$$

En introduisant ces valeurs dans la dernière équation de condition, elle prendra la forme suivante

$$\left[\sqrt{\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2}\,(\cos\varphi\sin\varphi\cos\psi\pm\sin^2\varphi\operatorname{tg} q)\right]_{x=0}^{x=\varepsilon} = 0.$$

Cette condition est précisément en concordance avec la supposition de Neumann, si le double signe est déterminé arbitrairement de la même manière que le fait Neumann. Au fond Neumann est parti de l'hypothèse que l'intensité totale de la lumière incidente est égale à la somme des intensités de la lumière réfractée et de la

lumière réfléchie, mais il remplace cette supposition par la condition ci-dessus. Inversement nous pouvons conclure que nos quatre équations de condition impliquent le théorème de la conservation de l'énergie et que par suite notre équation de l'intensité, qui doit satisfaire à cette condition, a été choisie correctement.

Après avoir déduit de cette manière les suppositions de Neumann des nôtres, nous pouvons dire que le problème proposé est complètement résolu, car il suit à présent des résultats obtenus que la théorie de la réflexion et de la réfraction développée par Neumann, qui est d'accord avec l'expérience, peut aussi être développée en partant de nos équations fondamentales.

Nous voici, comme auparavant dans la théorie de la double réfraction, parvenus à une station qui peut servir de point de départ à la partie formelle de la théorie de la lumière, et grâce au développement considérable qu'a reçu cette partie de la théorie, nous avons sous les yeux, sans que nous ayons besoin de faire un pas en avant, toute une partie de la théorie de la lumière comme une simple conséquence de notre théorie.

Si la théorie de la réflexion et de la réfraction n'avait pas déjà auparavant reçu un tel développement, nous ne chercherions pas à exprimer les conditions relatives aux limites par d'autres quantités auxiliaires que par nos composantes, car c'est avec celles-ci que les conditions relatives aux limites aussi bien que les lois de la double réfraction prendraient la forme la plus simple, et pour cette raison les calculs effectués au moyen de ces composantes seraient plus courts et plus élégants.

Dans les calculs en question nous avons tenu compte de l'effet immédiat de la partie périodique des composantes qui doit accompagner toute onde lumineuse dans les corps périodiquement hétérogènes et qui dépend de cette partie périodique; mais il faut aussi mentionner un effet secondaire du mouvement périodique des deux milieux, une réaction mutuelle qui ne sera pas sans influence sur le mouvement lumineux visible. Ici comme partout dans la nature, se rencontre une perturbation, et ce petit écart par rapport aux résultats obtenus pourra peut-être aussi être mis en évidence par l'expérience. Si les deux milieux étaient homogènes, les résultats du calcul tels que le théorème de la conservation de l'intensité seraient parfaitement exacts, mais ils ne le seraient plus dans le cas contraire. C'est ce qu'on peut aussi voir immédiatement, car une partie de la quantité originelle de lumière doit nécessairement s'évanouir par la formation du mouvement périodique de l'onde dans le corps. J'omets ici une autre perturbation sur laquelle j'ai déjà auparavant appelé l'attention (Pogg. Ann., t. 111; second mémoire de cette édition) et qui résulte de ce que la surface de séparation des corps n'est pas un plan mathématiquement exact.

La perte de lumière visible dont nous venons de parler ne doit pas être confondue avec celle qui est produite par simple absorption. Cette dernière peut facilement être calculée. Les recherches nouvelles sur la réflexion et la réfraction par les corps imparfaitement transparents et par les métaux ont en effet donné ce résultat remarquable, que les lois admissibles pour les corps transparents sont encore valables dans ce cas,

sauf que l'indice de réfraction prend ici la forme complexe $a + b\sqrt{-1}$.

De ce fait nous pouvons déduire la conséquence importante que nos équations différentielles sont admissibles non seulement pour les corps transparents, mais pour tous les corps sans exception. On voit également, si nous cherchons à déterminer l'indice de réfraction par le développement des composantes en série, ainsi que nous l'avons fait dans le précédent mémoire, qu'il peut aussi prendre cette forme plus générale; cependant il est difficile d'indiquer les conditions dans lesquelles ceci aura lieu. Il semble pourtant que cela se produira vraisemblablement si la distance de deux points de même nature situés à l'intérieur d'un corps n'est pas petite en comparaison de la longueur d'onde. C'est pour cette raison qu'un corps transparent pulvérisé cessera d'être transparent.

Si nous comparons les résultats du mémoire précédent avec ceux du présent travail, nous reconnaîtrons que nous sommes parvenus à notre but: déduire de nos équations fondamentales tous les phénomènes de la lumière qui ne dépendent pas de forces inconnues, électriques ou chimiques; on voit que l'explication de la double réfraction, de la polarisation circulaire, de la dispersion, de la réflexion, est une simple conséquence de ces équations. Il m'est permis ici d'omettre la théorie générale de la diffraction parce qu'elle ne donne aucun contrôle de notre théorie. Pour des corps homogènes elle peut facilement être déduite de nos équations; mais si le phénomène se complique en même temps d'une diffraction et d'une réflexion, la difficulté se trouve plutôt

dans la recherche des conditions qui correspondent à chaque expérience que dans le calcul lui-même, et la concordance des calculs et des expériences démontrerait plutôt l'admissibilité des conditions choisies qu'elle ne serait un contrôle de la théorie. Pour cette raison je crois que je puis considérer comme terminé l'examen de la légitimité des nos équations fondamentales, et j'appellerai l'attention sur quelques conséquences ultérieures de nos résultats.

Le coefficient périodique ω qui entre dans nos équations peut en général être exprimé par la formule

$$\frac{1}{\omega^2} = \frac{1}{\Omega^2}\left(1 + \Sigma \varepsilon_p \cos \frac{a_p x + b_p y + c_p z + d_p}{\alpha_p}\right),$$

où Ω, ε_p, ... sont des quantités constantes, comme je l'ai démontré dans le précédent mémoire. D'après cette formule, les corps sont regardés comme composés de plusieurs systèmes de couches parallèles, dont l'épaisseur est α_p et dont la normale fait avec les axes de coordonnées des angles dont les cosinus sont a_p, b_p, c_p. De plus soient a, b, c les vitesses des composantes dans les directions des axes et a_{11}, a_{22}, a_{33} trois quantités liées à ces vitesses par les équations

$$a_{11} = \frac{\Omega^2}{a^2}, \quad a_{22} = \frac{\Omega^2}{b^2}, \quad a_{33} = \frac{\Omega^2}{c^2}.$$

Ces dernières quantités peuvent être exprimées au moyen des constantes du corps, comme je l'ai démontré dans le précédent mémoire (Pogg. Ann., t. 118, p. 131; p. 110 de cette édition), et l'on trouvera aisément, pour $\alpha_p = 0$,

$$a_{11} = 1 - \Sigma \frac{\varepsilon_p^2}{2} a_p^2, \quad a_{22} = 1 - \Sigma \frac{\varepsilon_p^2}{2} b_p^2, \quad a_{33} = 1 - \Sigma \frac{\varepsilon_p^2}{2} c_p^2.$$

Si le corps est par exemple disposé en couches parallèles à une direction unique, et si nous prenons la normale à ces couches pour axe des x, nous aurons $b_p = c_p = 0$. Par conséquent les vitesses b et c deviendront égales et la quantité a ou la vitesse de propagation de la composante dans la direction de la normale aura la plus grande valeur. Un tel corps se comporte donc comme un cristal négatif doublement réfringent à un axe, dont l'axe est perpendiculaire aux couches du corps. Ce résultat est en concordance avec les expériences de M. Schultze (Verh. der rheinl. Gesell. 1860). Si nous appelons O la vitesse de la lumière dans le vide, $\frac{O}{a}$ sera l'indice de réfraction correspondant à la vitesse a, et l'indice moyen sera exprimé par

$$n = \sqrt{\frac{1}{3} O^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right)}.$$

Cet indice moyen est indépendant de la position des axes choisis, même si les petites quantités α_p ne peuvent être tout à fait négligées, car on trouvera

$$a_{11} + a_{22} + a_{33} = 3 - \Sigma \frac{\varepsilon_p^2}{2} + \Sigma \varepsilon_p^2 \alpha_p^2 \frac{k^2}{\Omega^2},$$ * * NOTE 7.

d'où l'on déduira

$$n^2 = \frac{O^2}{\Omega^2} \left(1 - \frac{1}{6} \Sigma \varepsilon_p^2 + \frac{4}{3} \pi^2 \frac{O^2}{\Omega^2} \Sigma \varepsilon_p^2 \frac{\alpha_p^2}{\lambda^2} \right),$$

quantité qui est indépendante du choix des axes.

Dans l'équation précédente nous avons posé $k = \frac{2\pi O}{\lambda}$,* λ désignant la longueur d'onde, et cela fait voir * NOTE 8.
que l'indice moyen de réfraction ou le carré de cet indice prendra la forme $a + b \frac{1}{\lambda^2}$, b étant une quantité posi-

tive. Par suite, si la longueur d'onde devient plus petite, la lumière sera plus réfrangible, loi qui a toujours été vérifiée; il peut pourtant se faire que la formule approximative ci-dessus ne suffise pas dans le cas des milieux absorbants, et qu'il y ait alors des exceptions à la règle.

La forme que nous avons donnée à la fonction ω est la plus simple et la plus commode pour les calculs faits jusqu'ici; mais si nous voulons tirer encore quelques conclusions relatives à la constitution intérieure des corps, il sera nécessaire de déterminer avec plus de précision les constantes qui entrent dans la formule. Le coefficient $\frac{1}{\omega^2}$ est en général une fonction tout à fait arbitraire $f(x, y, z)$, mais satisfaisant toutefois à l'équation

$$f(x, y, z) = f(x + 2p\alpha_1,\ y + 2q\beta_1,\ z + 2r\gamma_1),$$

où p, q, r sont des nombres entiers et α_1, β_1, γ_1 des constantes très petites. Cette condition exprime que le corps est hétérogène, de telle manière que l'hétérogénéité se dérobe à l'observation immédiate par une périodicité qui se répète si vite que le corps est apparemment homogène.

Une telle fonction peut être exprimée par la formule bien connue

$$f(x, y, z) = \Sigma \int \frac{d\varpi}{\varpi_1} f(\alpha, \beta, \gamma) \left[\cos \pi \left(\frac{i(x-\alpha)}{\alpha_1} + \frac{i_1(y-\beta)}{\beta_1} + \frac{i_2(z-\gamma)}{\gamma_1} \right) \right],$$

i, i_1, i_2 étant des entiers qui parcourent toute la série des nombres de $-\infty$ à $+\infty$, et l'intégrale étant prise entre les limites $-\alpha_1$, $-\beta_1$, $-\gamma_1$ et α_1, β_1, γ_1. On a ici remplacé $d\alpha\, d\beta\, d\gamma$ par $d\varpi$ et $\int d\varpi = 8\alpha_1\beta_1\gamma_1$ par ϖ_1.

Si l'on exclut de la somme le terme correspondant

à $i = i_1 = i_2 = 0$, si de plus on néglige les valeurs négatives de i en multipliant la somme par 2, et que l'on n'estime les termes qui correspondent à l'indice $i = 0$ qu'à la moitié de leur valeur, on obtiendra, en modifiant de cette manière le sens du signe de sommation,

$$f(x, y, z) = \int \frac{d\varpi}{\varpi_1} f$$
$$+ 2\Sigma \int \frac{d\varpi}{\varpi_1} f \left[\cos\pi\left(\frac{i(x-\alpha)}{\alpha_1} + \frac{i_1(y-\beta)}{\beta_1} + \frac{i_2(z-\gamma)}{\gamma_1}\right)\right],$$

$f(\alpha, \beta, \gamma)$ étant remplacée par f.* * NOTE 9.

Si nous comparons cette valeur du coefficient

$$\frac{1}{\omega^2} = f(x, y, z)^*$$ * NOTE 10.

avec la valeur précédente, nous obtiendrons

$$\frac{1}{\Omega^2} = \int \frac{d\varpi}{\varpi_1} f,$$
$$\varepsilon_p \cos\frac{d_p}{\alpha_p} = 2\Omega^2 \int \frac{d\varpi}{\varpi_1} f \cdot \mathrm{soc}\,\pi\left(\frac{i\alpha}{\alpha_1} + \frac{i_1\beta}{\beta_1} + \frac{i_2\gamma}{\gamma_1}\right),$$
$$\varepsilon_p \sin\frac{d_p}{\alpha_p} = -2\Omega^2 \int \frac{d\varpi}{\varpi_1} f \cdot \sin\pi\left(\frac{i\alpha}{\alpha_1} + \frac{i_1\beta}{\beta_1} + \frac{i_2\gamma}{\gamma_1}\right).$$

De ces deux dernières équations nous déduirons la valeur de $\Sigma \varepsilon_p^2$, et nous simplifierons l'expression trouvée en remplaçant le carré d'une intégrale par le produit de deux intégrales qui toutes deux ont la même valeur. Nous aurons alors, en désignant par des accents les variables de l'une des intégrales et en écrivant f' au lieu de $f(\alpha', \beta', \gamma')$,

$$\Sigma \varepsilon_p^2 = 4\Omega^4 \Sigma \int \frac{d\varpi}{\varpi_1} f \int \frac{d\varpi'}{\varpi_1} f' C,$$

où

$$C = \cos\pi\left(\frac{i(\alpha-\alpha')}{\alpha_1} + \frac{i_1(\beta-\beta')}{\beta_1} + \frac{i_2(\gamma-\gamma')}{\gamma_1}\right),$$

et par suite, en vertu de l'équation $2\Sigma\int\frac{d\varpi'}{\varpi_1}C = f - \int\frac{d\varpi'}{\varpi_1}f''$,

$$\Sigma\varepsilon_p^2 = 2\Omega^4\left[\int\frac{d\varpi}{\varpi_1}f^2 - \left(\int\frac{d\varpi}{\varpi_1}f\right)^2\right].$$

Les expressions de Ω^2 et $\Sigma\varepsilon_p^2$ obtenues de cette manière peuvent être introduites dans l'expression trouvée ci-dessus pour l'indice moyen de réfraction. Mais comme nous pouvons supposer que les expériences sont délivrées de l'influence perturbatrice de la dispersion, nous pouvons négliger les petites quantités α_p et introduire seulement les quantités nouvelles dans l'équation

$$r^2 = \frac{O^2}{\Omega^2} - \frac{O^2}{6\,\Omega^2}\,\Sigma\varepsilon_p^2,$$

r étant la valeur de l'indice moyen de réfraction réduite.

Nous essayerons à présent de faire une application du résultat trouvé. On doit cependant remarquer que la dernière équation n'exprime qu'approximativement la valeur de r dans l'hypothèse faite au commencement, que les quantités ε_p sont petites.

J'ai bien réussi à développer la valeur exacte de r en une série dont les premiers termes sont donnés par la formule ci-dessus, et j'indiquerai les calculs quand il en sera besoin; mais cette formule approximative suffit pour le but que nous avons en vue.

On sait comment l'idée du pouvoir réfringent a paru dans la science il y a déjà longtemps, comment la théorie dominante l'a rejetée comme inutile, et comment elle a pourtant toujours reparu et gardé une certaine admissibilité. Il suffit de jeter un coup d'œil sur l'aperçu donné dans le tome 116 de ces Annales (les Ann. de Pogg.) par Albr. Schrauff du pouvoir réfringent des divers corps pour être convaincu d'une certaine régularité dans

les valeurs de cette quantité. On voit tout d'abord que le pouvoir réfringent, qui, débarrassé de la dispersion, peut être exprimé par

$$M = \frac{r^2 - 1}{\rho},$$

ρ étant la densité du corps, est à peu près constant pour le même corps quand la densité varie, et qu'on peut calculer le pouvoir réfringent des mélanges par la formule suivante

$$Mp = M_1 p_1 + M_2 p_2 + \ldots,$$

p étant le poids du mélange et les lettres affectées d'indices correspondant aux différents éléments du corps.

Une autre loi qui semble avoir échappé à l'attention est mise en évidence par le même aperçu (p. 210), à savoir que le pouvoir réfringent, toujours et sans exception, décroît un peu en même temps que l'indice de réfraction. C'est précisément la présente théorie qui pour la première fois a attiré mon attention sur cette décroissance.

Ces lois empiriques peuvent en effet toutes être déduites de notre théorie. Il faut toutefois supposer que les corps sont composés d'éléments transparents, les molécules, séparés par des intervalles auxquels correspond une vitesse de la lumière qui est celle de l'espace vide. De plus il faut que ces molécules restent invariables pendant que ces lois sont admissibles, de telle manière que chaque variation du corps n'influence que l'étendue des intervalles et la disposition des molécules.

Dans l'intégrale

$$\frac{1}{\Omega^2} = \int \frac{d\varpi}{\varpi_1} f$$

nous pouvons donc négliger les éléments qui correspondent à l'espace vide au dehors des molécules. Comme dans le vide la vitesse de la lumière (ω) est égale à O et que par suite

$$f = \frac{1}{O^2},$$

nous obtiendrons

$$\frac{1}{\Omega^2} = \frac{1}{O^2} + \int \frac{d\varpi}{\varpi_1}\left(f - \frac{1}{O^2}\right),$$

où l'intégration ne s'étend qu'à la partie invariable de l'espace remplie de molécules. ρ étant la densité du corps, $\rho\varpi_1$ gardera, pour toutes les variations de la densité du corps, une valeur constante que nous appellerons c.

Nous aurons par suite

$$\frac{1}{\Omega^2} = \frac{1}{O^2}(1 + \rho P),$$

où

$$P = \int \frac{d\varpi}{c}(O^2 f - 1)$$

est une quantité indépendante de la densité du corps.

De la même manière on peut transformer l'intégrale

$$\int \frac{d\varpi}{\varpi_1} f^2.$$

Si nous posons

$$S = \int \frac{d\varpi}{c}(O^4 f^2 - 1),$$

où l'intégration correspond à la partie de l'espace remplie de molécules, nous obtiendrons

$$\Sigma \varepsilon_p^2 = 2\rho \frac{S - 2P - \rho P^2}{(1 + \rho P)^2}$$

et par suite

$$r^2 = 1 + \rho P - \tfrac{1}{3}\rho \frac{S - 2P - \rho P^2}{1 + \rho P}.$$

Le dernier terme étant très petit d'après nos hypothèses, le pouvoir réfringent sera à peu près constant et égal à

$$M = \frac{r^2 - 1}{\rho} = P.$$

Si nous tenons compte aussi du dernier terme, le pouvoir réfringent aura approximativement la forme

$$M = Q - \frac{R}{r^2},^*$$

* NOTE 11.

Q et R étant deux constantes positives. Le pouvoir réfringent décroît donc en même temps que l'indice de réfraction.

La formule donnée ci-dessus

$$\frac{1}{\Omega^2} = \frac{1}{O^2}(1 + \rho P)$$

peut être appliquée à un mélange comme à tout autre corps. Si la densité et le volume de chaque élément étaient à l'origine respectivement ρ_1, ρ_2, ..., v_1, v_2, ... et si le mélange remplit l'espace v, les éléments du mélange auront dans ce mélange les densités $\rho_1 \frac{v_1}{v}$, $\rho_2 \frac{v_2}{v}$, ...

Les constantes P_1, P_2, ... des éléments ne varient pas avec les densités, et par conséquent nous aurons

$$\frac{1}{\Omega^2} = \frac{1}{O^2}\left(1 + \rho_1 \frac{v_1}{v} P_1 + \rho_2 \frac{v_2}{v} P_2 + \ldots\right).^*$$

* NOTE 12.

Mais $v\rho$, $v_1\rho_1$, $v_2\rho_2$, ... sont proportionnels au poids du mélange et de chaque élément en particulier, et par suite nous aurons, p, p_1, p_2, ... étant les poids,

$$pP = p_1 P_1 + p_2 P_2 + \ldots$$

De la même manière nous obtiendrons

$$pQ = p_1Q_1 + p_2Q_2 + \dots$$
$$pR = p_1R_1 + p_2R_2 + \dots$$

La présente théorie ne donne donc pas seulement l'explication de la constance du pouvoir réfringent et de la formule des mélanges*, elle détermine encore avec plus de précision ces lois et montre avant tout que le pouvoir réfringent doit décroître avec l'indice de réfraction.

* NOTE 13.

C'est ce que l'expérience confirme parfaitement, et nous pouvons ici nous contenter de ces résultats, car il serait inutile d'examiner de plus près les détails des expériences, en partie parce qu'on voit immédiatement qu'on peut obtenir une meilleure concordance avec deux constantes qu'avec une, et en partie parce que nos formules ne sont qu'approximativement exactes.

Enfin il ne sera pas dépourvu d'intérêt de voir quels renseignements les divers phénomènes lumineux nous donnent sur la constitution intérieure des corps. La double réfraction montre en premier lieu la stratification régulière des corps, stratification qu'on peut déjà voir immédiatement à leur apparence extérieure. L'épaisseur des couches ne peut pourtant pas être déduite de la double réfraction, car celle-ci aurait encore lieu, même si les couches étaient infiniment petites. Mais la polarisation circulaire et surtout la dispersion en général montrent qu'en réalité il n'en est pas ainsi, mais qu'il se trouve dans tous les corps, les fluides élastiques eux-mêmes à peine exceptés, une stratification de dimensions mesurables. La polarisation circulaire montre de plus qu'il se trouve dans l'intérieur de certains cristaux un défaut de symétrie,

ce qu'on peut aussi reconnaître à leur apparence extérieure, et la rareté même de cette polarisation nous apprend qu'un tel défaut de symétrie n'est pas le cas ordinaire. Enfin le pouvoir réfringent montre que d'un côté la limite de la périodicité dans l'intérieur des corps est l'espace vide, et que par suite les corps sont composés de molécules transparentes séparées par des intervalles vides.

NOTES.

NOTE **1.** Voir l'analyse du mémoire dans les „Fortschritte der Physik", t. 20, p. 144.

NOTE **2.** Lorenz dit que

$$\varphi = e^{c - \int \frac{dx}{a + b\cos\frac{x}{\alpha}}}$$

a la valeur approximative

$$\varphi = e^{c - \frac{x}{\sqrt{a^2 - b^2}}},$$

si α a une valeur très petite. Le mémoire ne mentionne pas les limites de l'intégrale, mais on peut faire la supposition qu'elles sont 0 et x. Le théorème peut alors être déduit de la manière suivante, si $a > b > 0$.

On sait que

$$\int_0^x \frac{dx}{a + b\cos x} = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{a - b}{a + b}} \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)$$

si $0 < x \overline{\overline{<}} \pi$, et que par suite

$$\int_0^\pi \frac{dx}{a + b\cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}},$$

d'où l'on déduit facilement

$$\int_0^{m\pi} \frac{dx}{a + b\cos x} = \frac{m\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}},$$

où m est un nombre entier. Par conséquent on aura

$$\int_0^x \frac{dx}{a + b\cos\frac{x}{\alpha}} = \alpha \int_0^{\frac{x}{\alpha}} \frac{dx}{a + b\cos x} = \alpha\left(\frac{m\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}} + \int_{m\pi}^{\frac{x}{\alpha}} \frac{dx}{a + b\cos x}\right),$$

où $\frac{x}{\alpha} - mx < \pi$. Mais si α a une valeur très petite, on aura approximativement

$$\int_0^x \frac{dx}{a + b\cos\frac{x}{\alpha}} = \frac{x}{\sqrt{a^2 - b^2}}.$$

NOTE 3. En ce qui concerne les traits horizontaux, voir le mémoire: Sur la théorie de la lumière (quatrième mémoire de cette édition).

NOTE 4. Les équations sont identiques à celles qui précèdent, si l'on fait la supposition que toutes les quantités ξ_s, η_s, ζ_s, ξ', η', ζ' sont de la forme

$$A \cdot e^{\sqrt{-1}(kt - lx - my - nz)}.$$

NOTE 5. Si les composantes de la lumière sont exprimées comme ci-dessus, la condition sera exprimée par l'équation

$$\left[\frac{\partial \eta_s}{\partial y} + \frac{\partial \zeta_s}{\partial z}\right]_{x=0}^{x=\varepsilon} = 0,$$

et celle-ci peut aisément être déduite des équations de condition données.

NOTE 6. Voir p. 113 de la présente édition (Pogg. Ann., t. 118, p. 133).

NOTE 7. D'après le mémoire cité ci-dessus (Pogg. Ann., t. 118, p. 130; cette édition, p. 109) on aura

$$\left(l_p^2+m_p^2+n_p^2-\frac{k^2}{\Omega^2}\right)\xi(\rho_p) = \frac{\varepsilon_p}{2}\left[\left(\frac{k^2}{\Omega^2}-l_p^2\right)\xi_0-l_p m_p \eta_0-l_p n_p \zeta_0\right]$$

et d'après le même mémoire, p. 129 (cette édition, p. 108),

$$\xi_0+\Sigma\frac{\varepsilon_p}{2}\xi(\pm\rho_p) = a_{11}\xi_0+a_{12}\eta_0+a_{13}\zeta_0$$

et par conséquent

$$a_{11} = 1+\Sigma\frac{\left(\frac{\varepsilon_p}{2}\right)^2\left(\frac{k^2}{\Omega^2}-l_p^2\right)}{l_p^2+m_p^2+n_p^2-\frac{k^2}{\Omega^2}}$$

$$= 1+\Sigma\frac{\left(\frac{\varepsilon_p}{2}\right)^2\left(\frac{k^2}{\Omega^2}\alpha_p^2-(a_p\pm l\alpha_p)^2\right)}{(a_p\pm l\alpha_p)^2+(b_p\pm m\alpha_p)^2+(l_p\pm n\alpha_p)^2-\alpha_p^2\frac{k^2}{\Omega^2}}.$$

Si nous développons le second membre de cette équation en série suivant les puissances croissantes de α_p, tous les termes d'ordre impair s'évanouiront. Si nous nous bornons aux termes qui contiennent tout au plus la seconde puissance de α_p, nous aurons

$$a_{11} = 1-\Sigma\frac{\varepsilon_p^2}{2}\alpha_p^2+\Sigma\alpha_p^2\frac{\varepsilon_p^2}{2}\left[\frac{k^2}{\Omega^2}(1-a_p^2)+a_p^2(l^2+m^2+n^2)\right.$$
$$\left.-4a_p^2(la_p+mb_p+nc_p)^2-(l^2-4la_p(la_p+mb_p+nc_p))\right].$$

On obtiendra l'expression du mémoire par l'addition de cette expression et des deux expressions analogues pour a_{22} et a_{33}. Il est pourtant impossible de savoir ici

l'ordre des termes négligés et par conséquent le degré de l'approximation obtenue.

NOTE 8. Si $k = \frac{2\pi O}{\lambda}$, λ désigne la longueur d'onde dans le vide. La vitesse du front de l'onde dans le corps est égale à $\frac{k}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$ et par suite la longueur d'onde sera ici

$$b = \frac{2\pi}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}.$$

NOTE 9. L'explication de la notation n'est pas ici tout à fait correcte. Le but de la notation modifiée est de réunir en un seul tous les termes qui ne diffèrent que par le signe du terme

$$\frac{i(x-\alpha)}{\alpha_1} + \frac{i_1(y-\beta)}{\beta_1} + \frac{i_2(z-\gamma)}{\gamma_1}.$$

Pour cette raison on prend le double de la valeur de chaque terme, le premier seul excepté, et si i diffère de zéro, on ne donne à i que des valeurs positives; et de même si i est égal à zéro, mais que i_1 diffère de zéro, on ne donne à i_1 que des valeurs positives; et enfin si $i = i_1 = 0$, mais que i_2 diffère de zéro, on ne donne à i_2 que des valeurs positives.

NOTE 10. Dans la série (1) (Pogg. Ann., t. 118, p. 125; cette édition, p. 106), les différents termes sont supposés identiques à ceux de la série de Fourier qui exprime $f(x, y, z)$.

NOTE 11. On trouve

$$M = \frac{4}{3}P - \frac{1}{3}\frac{S-P}{1+\rho P},$$

où $S-P$ est positif, car cette valeur est plus grande que $S-2P-\rho P^2$, qui a une valeur positive, et r^2 étant approximativement égal à $1+\rho P$, on aura l'expression du mémoire en posant

$$Q = \frac{4}{3}P, \quad R = \frac{S-P}{3}.$$

NOTE 12. La formule donnée résulte de

$$\frac{1}{\Omega^2} = \frac{1}{O^2}(1+\rho P),$$

si l'on tient compte de la formule suivante, dont on reconnaît immédiatement la légitimité et qui peut s'écrire

$$\rho v P = \rho_1 v_1 P_1 + \rho_2 v_2 P_2 + \ldots$$

NOTE 13. La formule

$$Mp = M_1 p_1 + M_2 p_2 + \ldots$$

est identique à la formule

$$Pp = P_1 p_1 + P_2 p_2 + \ldots,$$

si l'on se contente de l'approximation $M = P$; mais on ne sait pas si la formule est encore valable quand on pose

$$M = Q - \frac{R}{r^2}.$$

SUR L'IDENTITÉ

DES VIBRATIONS DE LA LUMIÈRE

ET DES COURANTS ÉLECTRIQUES.

SUR L'IDENTITÉ DES VIBRATIONS DE LA LUMIÈRE ET DES COURANTS ÉLECTRIQUES.

VID. SELSKABS OVERS. 1867, P. 26–45.
POGG. ANN. T. CXXXI. P. 243–263.* * NOTE 1

La science est, comme on sait, parvenue dans notre siècle à constater un si grand nombre de relations entre les différentes forces, entre l'électricité et le magnétisme, la chaleur et la lumière, les forces chimiques et les forces moléculaires, qu'on est presque nécessairement conduit à les considérer toutes comme des expressions d'une seule et même force qui, suivant les circonstances, se manifeste sous des formes différentes. Telle est aussi l'idée qui a présidé aux travaux des plus grands savants de notre époque; mais il s'en faut de beaucoup qu'on ait réussi à la faire passer dans la théorie, et si l'on a démontré expérimentalement l'existence d'une relation entre les différentes forces, on n'a cependant pas pu l'expliquer, si ce n'est dans quelques cas isolés. En effet Ampère a bien donné une explication théorique du rapport qui existe entre l'électricité et le magnétisme — explication qui ne renferme toutefois aucune preuve de son hypothèse des courants particulaires spontanés et permanents — de même que, depuis Melloni, on a été de plus en plus amené à admettre l'identité de la lumière et de la chaleur rayonnante. Mais ces théories sont encore tout à

fait isolées comme des anneaux d'une grande chaîne, et on est si loin de pouvoir établir théoriquement l'idée de l'unité des forces, que maintenant encore, presqu'un demi-siècle après la grande découverte d'Œrsted, on considère généralement les deux électricités comme des fluides impondérables, la lumière comme un mouvement *vibratoire de l'éther*, et la chaleur comme un mouvement des *molécules des corps*.

Ces hypothèses physiques ne se concilient guère avec le principe de l'unité des forces; mais tandis que celui-ci a une grande importance pour la science, celles-là n'ont eu d'autre utilité pratique que de fixer les idées, en nous fournissant un moyen de grouper et de coordonner les phénomènes. Le plus juste serait donc de reconnaître que, dans l'état actuel de la science, nous ne pouvons encore nous faire aucune idée de la cause physique des forces ni de leur mode d'action dans l'intérieur des corps, et que par suite nous devons, au moins provisoirement, choisir une autre voie que celle des hypothèses physiques, pour pouvoir faire avancer la théorie sûrement et pas à pas, de manière que les progrès réservés à l'avenir ne viennent point détruire les résultats déjà acquis.

Cette manière de voir sert de base tant aux recherches qui font l'objet de ce mémoire qu'à mes travaux antérieurs sur la théorie de la lumière, et j'ai été d'autant plus encouragé à y persévérer que les résultats que j'ai l'honneur de présenter à la Société des Sciences concordent d'une manière remarquable avec ceux que j'ai obtenus précédemment. Mettant donc de côté les hypothèses physiques, je chercherai à ajouter un nouvel anneau à la chaîne qui relie entre elles les différentes forces, en démontrant que, conformément aux lois qui se dédui-

sent de l'expérience sur la propagation de l'électricité sous l'action de l'électricité libre et des courants du milieu ambiant, il peut exister des courants électriques périodiques qui, sous tous les rapports, se comportent comme les vibrations de la lumière, d'où résulte cette conséquence, que *les vibrations de la lumière sont elles-mêmes des courants électriques.*

Nous savons que la lumière se propage par des ondulations à mouvements périodiques extrêmement rapides que nous appellerons des vibrations. Ces vibrations présentent ceci de particulier qu'elles sont perpendiculaires à la direction suivant laquelle se fait la propagation. Or, c'est là une particularité qui n'a pas trouvé sa vraie explication dans la théorie de l'élasticité ni dans les développements de M. Cauchy; car, sans compter que cette théorie suppose l'existence d'un milieu spécial, l'éther, qui est du reste complètement isolé, inaccessible à nos sens, et sans relation appréciable avec d'autres forces, il n'est guère possible, même en admettant cette supposition ainsi que les diverses hypothèses de M. Cauchy, de concevoir un milieu où un mouvement vibratoire puisse se propager sans trace de vibrations longitudinales. Convaincu que la théorie dont il s'agit ne pouvait pas donner la véritable explication de ce que la lumière présente précisément de caractéristique, savoir les vibrations transversales, j'avais déjà, à une époque antérieure, porté mon attention sur la circonstance que des courants électriques variables, dans des conducteurs fermés, engendrent des courants d'induction qui leur sont parallèles, et ressemblent ainsi aux vibrations de la lumière, dont on peut dire également qu'elles produisent par induction des vibrations parallèles. Toutefois, comme les lois

générales des courants induits — lois confirmées par l'expérience — ne conduisaient pas directement au résultat désiré, il restait à résoudre cette question, s'il n'était pas possible de modifier ces lois de manière à leur faire embrasser, non seulement les expériences sur lesquelles elles s'appuient, mais aussi les phénomènes qui appartiennent à l'optique.

Kirchhoff (Pogg. Ann., t. 102) a exprimé les lois des courants électriques dans les corps à conductibilité constante par les formules suivantes

* NOTE 2.

$$\left.\begin{aligned} u &= -2k\left(\frac{\partial \Omega}{\partial x} + \frac{4}{c^2}\frac{\partial U}{\partial t}\right) \\ v &= -2k\left(\frac{\partial \Omega}{\partial y} + \frac{4}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t}\right) \\ w &= -2k\left(\frac{\partial \Omega}{\partial z} + \frac{4}{c^2}\frac{\partial W}{\partial t}\right) \end{aligned}\right\}, \qquad (1)^*$$

u, v, w étant les composantes de l'intensité du courant électrique au point (x, y, z), k la conductibilité, c une constante et

$$U = \iiint \frac{dx'dy'dz'}{r^3}(x-x')\left[u'(x-x') + v'(y-y') + w'(z-z')\right],$$

$$V = \iiint \frac{dx'dy'dz'}{r^3}(y-y')\left[u'(x-x') + v'(y-y') + w'(z-z')\right],$$

$$W = \iiint \frac{dx'dy'dz'}{r^3}(z-z')\left[u'(x-x') + v'(y-y') + w'(z-z')\right],$$

$$\Omega = \iiint \frac{dx'dy'dz'}{r}\varepsilon' + \int \frac{ds'}{r}e',$$

où u', v', w' sont les composantes de l'intensité du courant au point (x', y', z'), ε' la densité de l'électricité libre au même point, e' la densité électrique sur un élément de surface ds' et r la distance du point (x, y, z) à (x', y', z').

Ces formules expriment que la force électromotrice totale en (x, y, z), qui, d'après la loi d'Ohm, a pour composantes $\frac{u}{k}$, $\frac{v}{k}$, $\frac{w}{k}$, est la résultante de deux forces électromotrices, dont l'une représente l'action inductrice de l'électricité libre du corps et l'autre, qui est donnée par la loi de Weber, celle des courants variables de tous les éléments du corps.

De plus Kirchhoff a déterminé la relation entre les composantes du courant et l'électricité libre par les deux équations

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{2}\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}, \\ u\cos\lambda + v\cos\mu + w\cos\nu &= \frac{1}{2}\frac{\partial e}{\partial t}, \end{aligned}\right\} \quad (1)\ \text{bis suite}$$

λ, μ, ν étant les angles que fait la normale à la surface du corps dirigée vers l'intérieur avec les axes de coordonnées.

On voit tout de suite que les équations (1), ayant été établies d'une manière tout à fait empirique, ne sont pas nécessairement l'expression exacte de la loi véritable, et qu'il sera toujours permis d'y introduire de nouveaux termes ou de leur donner une autre forme, tant que ces changements n'exerceront aucune influence sensible sur les résultats constatés par l'expérience. Nous pouvons donc dès maintenant considérer les seconds membres de ces équations chacun comme le premier terme d'une série.

Introduisons une nouvelle fonction Ω définie par l'équation

$$\Omega = \iiint \frac{dx'dy'dz'}{r}\,\varepsilon'\left(t - \frac{r}{a}\right) + \int \frac{ds'}{r}\,e'\left(t - \frac{r}{a}\right).$$

où $\varepsilon'\left(t-\frac{r}{a}\right)$ et $e'\left(t-\frac{r}{a}\right)$ sont des fonctions formées avec $t-\frac{r}{a}$ comme ε' et e' le sont avec t dans l'expression originelle de Ω, et où a est une constante.

Par le développement en série on aura

$$\varepsilon'\left(t-\frac{r}{a}\right) = \varepsilon' - \frac{\partial\varepsilon'}{\partial t}\frac{r}{a} + \frac{\partial^2\varepsilon'}{\partial t^2}\frac{r^2}{a^2}\frac{1}{1\cdot 2} - \dots,$$

$$e'\left(t-\frac{r}{a}\right) = e' - \frac{\partial e'}{\partial t}\frac{r}{a} + \frac{\partial^2 e'}{\partial t^2}\frac{r^2}{a^2}\frac{1}{1\cdot 2} - \dots$$

On substituera ces séries dans l'équation ci-dessus, puis on différentiera cette équation pas rapport à x. De cette manière on obtiendra

$$\frac{\partial\overline{\Omega}}{\partial x} = \frac{\partial\Omega}{\partial x} + \frac{1}{2a^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\iiint\frac{dx'dy'dz'}{r}(x-x')\varepsilon' + \int\frac{ds'}{r}(x-x')e'\right] - \dots,$$

et en introduisant ici les expressions de $\frac{\partial\varepsilon'}{\partial t}$ et $\frac{\partial e'}{\partial t}$ données par l'équation (2), on trouvera en intégrant par parties

$$\frac{\partial\overline{\Omega}}{\partial x} = \frac{\partial\Omega}{\partial x} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial}{\partial t}\iiint\frac{dx'dy'dz'}{r}u' + \frac{1}{a^2}\frac{\partial U}{\partial t}\dots, \qquad (3)$$

U ayant la même signification que ci-dessus. Par conséquent on peut aussi écrire

$$\frac{\partial\overline{\Omega}}{\partial x} + \frac{1}{a^2}\frac{\partial}{\partial t}\iiint\frac{dx'dy'dz'}{r}u'\left(t-\frac{r}{a}\right) = \frac{\partial\Omega}{\partial x} + \frac{1}{a^2}\frac{\partial U}{\partial t}\dots, \qquad (4)$$

où $u'\left(t-\frac{r}{a}\right)$ est une fonction formée avec $t-\frac{r}{a}$ comme u' l'est avec t.

Le second membre de la dernière équation est une série, dont on n'a conservé que les deux premiers termes et dont les termes suivants procèdent suivant les puissances croissantes de $\frac{r}{a}$. Si l'on pose $a = \frac{c}{2}$, les

termes conservés seront identiques à l'expression entre parenthèses de la première équation (1); mais c est, d'après Weber, égal à 59320 milles géographiques (439450 kilomètres)*, tandis que la plus grande valeur de r employée dans les expériences n'a jamais dépassé un petit nombre de pieds, par où l'on voit que $\frac{r}{a}$ a une valeur presque insensible. Les termes suivants de la série seront donc tout à fait imperceptibles pour toutes les expériences dans lesquelles les dérivées par rapport au temps n'auront pas de très grandes valeurs. * NOTE 4.

Les équations des composantes du courant pourront donc être appliquées aux expériences dont elles sont déduites, aussi bien que les équations (1), si on leur donne la forme suivante, en vertu de (4) et des deux équations analogues,

$$\left.\begin{aligned} u &= -2k\left(\frac{\partial\overline{\Omega}}{\partial x}+\frac{4}{c^2}\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right),\\ v &= -2k\left(\frac{\partial\overline{\Omega}}{\partial y}+\frac{4}{c^2}\frac{\partial\beta}{\partial t}\right),\\ w &= -2k\left(\frac{\partial\overline{\Omega}}{\partial z}+\frac{4}{c^2}\frac{\partial\gamma}{\partial t}\right).^* \end{aligned}\right\} \quad (A)$$

* NOTE 5.

$$\alpha = \iiint\frac{dx'dy'dz'}{r}\,u'\left(t-\frac{r}{a}\right),$$

$$\beta = \iiint\frac{dx'dy'dz'}{r}\,v'\left(t-\frac{r}{a}\right),$$

$$\gamma = \iiint\frac{dx'dy'dz'}{r}\,w'\left(t-\frac{r}{a}\right).$$

Ces formules diffèrent des équations (1) en ce que les fonctions U, V, W sont remplacées par les expressions plus simples α, β, γ, et elles expriment en même temps que l'action totale exercée sur toutes les molécules

par l'électricité libre et par les courants électriques met un certain temps à se propager, fait qui n'est pas étranger à la science et a déjà en soi une certaine vraisemblance. Cette action au point (x, y, z) et à l'instant t dépend en effet, d'après les formules trouvées, non de l'état électrique des points (x', y', z') à ce même instant, mais de l'état qui existait à l'instant $t - \frac{r}{a}$, c'est-à-dire autant de temps auparavant qu'il en faut pour franchir la distance r avec la vitesse constante a.

La constante a, dans l'équation (A), devrait, d'après ce qui précède, être égale à $\frac{c}{2}$, mais on trouvera par un examen plus approfondi qu'elle est susceptible de prendre aussi d'autres valeurs. La première équation (A) peut en effet, en vertu de (3), s'écrire sous la forme

$$u = -2k\left(\frac{\partial \Omega}{\partial x} + \left(\frac{4}{c^2} - \frac{1}{a^2}\right)\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{1}{a^2}\frac{\partial U}{\partial t} - \dots\right),$$

et, en supposant ici $a = \frac{c}{2}$, on retombera sur la première équation (1), tandis que l'équation est précisément ramenée à la forme qui résulte de la théorie électrodynamique de Neumann si l'on suppose $a = \infty$. Or, celle-ci s'accordant également avec l'expérience, il est évident que les équations (A) continueront à être d'accord avec les expériences pour une valeur quelconque de a, pourvu que cette valeur soit du même ordre de grandeur que c, en sorte qu'on puisse considérer les termes suivants de la série comme insensibles dans les expériences électrodynamiques. Si l'on suppose par exemple $a = \frac{c}{\sqrt{2}}$, on obtiendra une moyenne entre les théories de Weber et de Neumann.

Il devient maintenant nécessaire d'obtenir par une autre voie que celle des expériences électrodynamiques une détermination de la constante a, ainsi qu'une confirmation ou une correction des résultats qui précèdent. On pourrait, en se servant avant tout de l'indication donnée dans les formules, que les effets électriques mettent un certain temps à se propager, chercher s'il n'existe pas sur le mode d'action de l'électricité dynamique une hypothèse vraisemblable, dont on pourrait déduire des résultats analogues aux résultats trouvés par expérience. Mais j'ai reconnu que cela peut se faire de plusieurs manières, ce qui infirme complètement l'importance de la méthode; car cette méthode n'aurait eu d'importance que dans le cas où l'on aurait pu trouver une seule hypothèse préférable à toutes les autres, parce qu'elle eût été plus vraisemblable. Après m'être appliqué à trouver une telle hypothèse, j'ai complètement renoncé cette fois comme auparavant à faire usage des hypothèses physiques, et il ne reste qu'à développer les conséquences des résultats obtenus et à chercher s'ils ne nous fournissent pas quelque moyen de résoudre le problème.

Étant donnée une fonction quelconque φ, on aura, si le point (x, y, z) se trouve entre les limites de l'intégrale,

$$\left(\Delta_2 - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\iiint \frac{dx'dy'dz'}{r}\cdot\varphi\left(t-\frac{r}{a}, x', y', z'\right) = -4\pi\varphi(t, x, y, z), \quad (5)$$

où Δ_2 désigne $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$.

La démonstration de ce théorème* se trouve dans mon mémoire (Journal de Crelle, t. 58), mais il peut actuellement être prouvé sans difficulté. Au moyen de * NOTE 6.

ce théorème les équations (A) peuvent être transformées en les équations différentielles

$$\Delta_2 u - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 8\pi k\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \frac{4}{c^2}\frac{\partial u}{\partial t}\right),$$

$$\Delta_2 v - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 8\pi k\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial y} + \frac{4}{c^2}\frac{\partial v}{\partial t}\right),$$

$$\Delta_2 w - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 8\pi k\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial z} + \frac{4}{c^2}\frac{\partial w}{\partial t}\right),$$

système qui peut être, en vertu de (2), complété par l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{2}\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}.$$

Ces équations sont satisfaites en particulier par

* NOTE 7. $$u = e^{-hz}\cos p(\omega t - z), \quad v = 0, \quad w = 0,^* \qquad (6)$$

où h, p, ω sont des constantes, entre lesquelles on a les deux relations

$$h^2 a^2 = p^2(a^2 - \omega^2) \quad \text{et} \quad hc^2 = 16\pi k\omega. \qquad (7)$$

On voit déjà par cette transformation provisoire des équations (A) qu'il peut y avoir des courants électriques périodiques, qu'ils se propagent comme un mouvement ondulatoire avec la vitesse ω, et exécutent, comme la lumière, des vibrations perpendiculaires à la direction de ce mouvement. Si par suite nous admettons que les vibrations lumineuses elles-mêmes sont des courants électriques, ω exprimera la vitesse de la lumière, et a celle avec laquelle les actions électriques se propagent dans l'espace. Il résulte en outre des dernières équations que, lorsque la conductibilité électrique k du corps est très petite, les deux vitesses ω et a s'approchent de plus en plus de l'égalité.

La vitesse avec laquelle les actions électrodynamiques, dans les recherches de Weber, se propagent dans l'air d'un conducteur à un autre, est donc, d'après ces résultats, précisément la même que celle de la lumière dans l'air. Weber ayant trouvé $c = 439450$ kilomètres ($c = 59320$ milles géographiques), on a donc

$$\frac{c}{\sqrt{2}} = 310756 \text{ kilomètres (41950 milles géographiques)},^*$$ * NOTE 8.

résultat qui s'accorde d'une manière remarquable avec les différentes déterminations faites jusqu'ici de la vitesse de la lumière. Celles-ci sont en effet ou supérieures ou inférieures à cette valeur, de sorte qu'on peut la considérer comme une détermination nouvelle, qui, en exactitude, ne le cède en rien aux autres.

Nous pouvons donc poser

$$a = \frac{c}{\sqrt{2}},$$

et si dans les équations (A) on remplace c par $a\sqrt{2}$, la justesse de cette supposition se trouve confirmée d'une façon remarquable, car c'est précisément cette valeur de c qui donne aux équations (A) la forme la plus simple, et conduit, à un terme près, aux mêmes équations différentielles que j'ai déjà publiées (voir Ann. de Pogg., t. 118 et 121; quatrième et cinquième mémoire de cette édition) sur les vibrations lumineuses. On aura en effet, en vertu des équations (2),

$$\frac{\partial}{\partial t}\varepsilon'\left(t-\frac{r}{a}\right) = -2\left(\frac{\partial}{\partial x'}u'\left(t-\frac{r}{a}\right)+\frac{\partial}{\partial y'}v'\left(t-\frac{r}{a}\right)+\frac{\partial}{\partial z'}w'\left(t-\frac{r}{a}\right)\right),$$

où les différentiations partielles par rapport à x', y', z'

doivent être exécutées en traitant r comme une constante, et où

$$\frac{\partial}{\partial t} e'\left(t - \frac{r}{a}\right) = -2\left(u'\left(t-\frac{r}{a}\right)\cos\lambda + v'\left(t-\frac{r}{a}\right)\cos\mu + w'\left(t-\frac{r}{a}\right)\cos\nu\right).$$

Si l'on introduit ces expressions dans

* NOTE 9. $$\frac{\partial \overline{\Omega}}{\partial t} = \iiint \frac{dx'dy'dz'}{r}\frac{\partial}{\partial t}\varepsilon'\left(t-\frac{r}{a}\right) + \int\frac{ds'}{r}\frac{\partial}{\partial t}e'\left(t-\frac{r}{a}\right),^{*}$$

on aura, en intégrant par parties et en se servant des notations α, β, γ, dont la signification a été expliquée dans ce qui précède,

$$\frac{\partial \overline{\Omega}}{\partial t} = -2\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\beta}{\partial y} + \frac{\partial\gamma}{\partial z}\right).$$

De plus on aura, en vertu de (5),

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2} = \Delta_2\alpha + 4\pi u,$$

et par suite les équations (A) peuvent, après avoir été différentiées par rapport à t et après qu'on y a remplacé c par $a\sqrt{2}$, être transformées en

$$\left.\begin{aligned}
-\frac{1}{4k}\frac{\partial u}{\partial t} - 4\pi u &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y} - \frac{\partial\beta}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial x} - \frac{\partial\alpha}{\partial z}\right),\\
-\frac{1}{4k}\frac{\partial v}{\partial t} - 4\pi v &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\beta}{\partial z} - \frac{\partial\gamma}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y} - \frac{\partial\beta}{\partial x}\right),\\
-\frac{1}{4k}\frac{\partial w}{\partial t} - 4\pi w &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial x} - \frac{\partial\alpha}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\beta}{\partial z} - \frac{\partial\gamma}{\partial y}\right).
\end{aligned}\right\}\quad (8)$$

De plus on conclut immédiatement des équations (A)

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{4k}{a^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \beta}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial y}\right),\\
\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{4k}{a^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \gamma}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial z}\right),\\
\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{4k}{a^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial x}\right),
\end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

et au moyen de ces équations on peut éliminer les quantités α, β, γ des equations (8), après avoir differentie celles-ci par rapport à t. De cette manière on obtiendra

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right) &= \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{16\pi k}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t},\\
\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) &= \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{16\pi k}{a^2}\frac{\partial v}{\partial t},\\
\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right) &= \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{16\pi k}{a^2}\frac{\partial w}{\partial t}.
\end{aligned}\right\} \qquad (B)$$

Ces équations différentielles pour les composantes du courant électrique sont en complet accord avec celles que j'ai trouvées précedemment pour les composantes de la lumière (voir Pogg. Ann., t. 121; cinquième memoire de cette édition); elles n'en diffèrent que par le dernier terme qui contient la conductibilité électrique k. Comme on peut le voir par l'integrale (6), qui est aussi applicable ici, le dernier terme suppose une absorption définie par le coefficient h, qui, d'après (7), croît avec la conductibilité k.

Si celle-ci est très grande relativement à pa ou $\frac{2\pi}{\lambda}a$, λ désignant la longueur des ondulations, on a, d'après (7),

$$h = p = \frac{2\pi}{\lambda},\text{*}$$

* NOTE 10.

d'où l'on peut conclure, par exemple, que l'amplitude

des vibrations, dans un rayon lumineux qui a traversé une couche bonne conductrice d'épaisseur égale à une demi-longueur d'onde, devient e^{π} fois plus petite, et l'intensité, calculée proportionnellement au carré de l'amplitude, $e^{2\pi}$ ou 535 fois plus faible. Ce sera le cas pour tous les métaux, car la conductibilité du cuivre, en prenant le millimètre et la seconde comme unités de longueur et de temps, est, d'après M. Weber, de $\frac{1}{274100}$ en unités magnétiques, et par suite, en unités mécaniques,
NOTE 11. de $\frac{1}{274100} \times \frac{c^2}{8}$ ou $283433\,a$ *, grandeur qui dépasse notablement $\frac{2\pi}{\lambda}a$.

Il va sans dire que ce résultat ne peut être considéré que comme approximatif, puisque nous avons supposé une conductibilité constante, c'est-à-dire une homogénéité qui n'existe pas dans la réalité. Mais le résultat principal, savoir que tous les bons conducteurs de l'électricité absorbent à un haut degré la lumière, présente, on le sait, un accord remarquable avec l'expérience.

Lorsque la conductibilité électrique k est très petite, les équations (7) donnent

$$h = \frac{8\pi k}{a}.$$

On a trouvé plus haut pour le cuivre

$$\frac{k}{a} = 283433;$$

mais la conductibilité de tous les corps transparents est, comme on sait, incomparablement moindre, et si nous en exceptons les corps fluides, où l'action chimique et la

mobilité des molécules jouent un rôle si important qu'il est en réalité impossible ici d'en déterminer la conductibilité, nous trouvons que, pour tous les autres corps transparents, la conductibilité est un si grand nombre de millions de fois plus petite que celle des métaux, que le coefficient d'absorption h disparaît en même temps que le dernier terme des équations (B), ce qui rend ces équations complètement identiques avec celles de la lumière. Par conséquent, de même que la bonne conductibilité des métaux nous permet d'en conclure qu'ils sont opaques, de même nous pouvons conclure réciproquement de la plus faible transparence d'un corps qu'il est, relativement aux métaux, un très mauvais conducteur du courant électrique, résultat que l'expérience a complètement confirmé.

Les vibrations périodiques qui résultent des équations (B) sont transversales, et on n'obtiendra pas de vibrations longitudinales, même en conservant le terme qui contient k. Si l'on pose pour abréger

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \theta,$$

on obtiendra, en différentiant les trois équations respectivement par rapport à x, y, z et en additionnant,

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + 16\pi k\theta = 0,$$

par où l'on peut voir que θ n'est pas, comme les composantes u, v, w, une fonction périodique du temps et que par conséquent les vibrations longitudinales sont impossibles. De plus cette équation fait voir que θ s'approche de zéro par l'accroissement du temps, que la valeur de θ en un point est indépendante de la valeur

des composantes des déplacements aux points voisins, et que par suite on doit en général supposer $\theta = 0$. Une autre conséquence est, en vertu de l'équation

* NOTE 12.

$$\theta = -\frac{1}{2}\frac{\partial \varepsilon}{\partial t},*$$

que le développement de l'électricité libre dans les corps à conductibilité constante est impossible. Ce résultat diffère de celui de Kirchhoff, qui a déduit des équations (1) que la quantité d'électricité libre à l'intérieur des corps n'est pas nulle en général; mais le développement qui précède fait voir en tout cas qu'on ne peut pas énoncer cette conclusion avec sûreté.

Après avoir ainsi démontré qu'en partant des équations (A), qui renferment les lois des courants électriques constatées par l'expérience, on peut arriver aux équations différentielles (B), qui montrent que les courants électriques peuvent se comporter sous tous les rapports comme des vibrations lumineuses, on peut se demander si inversement il est possible de déduire les lois des courants électriques des lois bien connues de la lumière. Je vais démontrer que cela est faisable, en montrant que les équations (A) peuvent inversement être déduites des équations (B), si l'on ajoute les conditions qui doivent être remplies aux limites du corps, conditions qu'il faut nécessairement connaître pour déduire des équations différentielles d'autres équations qui en sont à un certain point de vue les intégrales. On verra de plus que ces conditions relatives aux limites sont identiques à celles que j'ai trouvées précédemment pour les composantes de la lumière (Pogg. Ann., t. 118, p. 126; cette édition, p. 104), et que

par suite on n'aura besoin pour ce calcul que des hypothèses que l'optique elle-même nous fournit.* * NOTE 13.

Pour un élément de la surface du corps perpendiculaire à l'axe des x, j'ai trouvé à l'endroit cité que les quantités

$$u,\ w,\ \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x},\ \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}$$

doivent avoir les mêmes valeurs des deux côtés de la surface de séparation, ce qui détermine également les conditions pour tout autre élément de la surface, car on peut choisir la position des axes d'une manière arbitraire. Ces conditions sont déduites des équations différentielles qui donnent les composantes de la lumière elles-mêmes, équations dont on peut se servir ici parce qu'elles sont admissibles en tout cas pour tous les milieux hétérogènes, et ces conditions ne varieront pas, même si l'on ajoute aux équations, ce qu'il faut nécessairement faire ici, les termes qui contiennent le facteur k.

Pour un corps à conductibilité constante, qu'on peut supposer entouré de corps absolument non conducteurs, sans s'inquiéter de savoir s'il s'en trouve ou non de tels dans la nature, les quantités u, w, etc., s'évanouiront aux limites du corps; car un courant électrique ne peut pas exister sur la surface isolante qui limite le conducteur.

Nous remplacerons les quantités u, v, w, x, y, z qui entrent dans les équations (B) par les lettres marquées d'un accent u', v', w', x', y', z', et de même t par $t - \frac{r}{a}$, où r est la distance du point considéré (x', y', z') à un point fixe (x, y, z) du corps. Ces substitutions étant faites, les équations seront encore valables, si l'on exécute les différentiations partielles dans les premiers membres

des équations en regardant r comme une constante, bien qu'il renferme les variables. On multipliera les équations par $\frac{dx'dy'dz'}{r}$, puis on les intégrera dans tout le volume du corps. De cette manière le premier membre de la première équation donnera en intégrant par parties, si nous
* NOTE 14. nous servons des mêmes notations que précédemment,*

$$\iiint \frac{dx'dy'dz'}{r} \frac{\partial^2}{\partial y'^2} u'\left(t - \frac{r}{a}\right)$$

$$= -\int \frac{ds'}{r} \frac{\partial}{\partial y'} u'\left(t - \frac{r}{a}\right) \cos\mu + \iiint \frac{dx'dy'dz'}{r} \frac{\partial}{\partial y'} u'\left(t - \frac{r}{a}\right),$$

et, en intégrant de nouveau par parties, le dernier terme donnera

$$-\frac{\partial}{\partial y}\int \frac{ds'}{r} u'\left(t - \frac{r}{a}\right) \cos\mu + \frac{\partial^2 a}{\partial y^2}.$$

En traitant de la même manière tous les termes du premier membre de l'équation, on trouvera, si l'on veut que toutes les intégrales relatives à la surface du corps s'évanouissent, qu'on doit avoir

$$\left(\frac{\partial u'}{\partial y'} - \frac{\partial v'}{\partial x'}\right) \cos\mu - \left(\frac{\partial w'}{\partial x'} - \frac{\partial u'}{\partial z'}\right) \cos\nu = 0,$$

$$u' \cos\mu - v' \cos\lambda = 0, \quad u' \cos\nu - w' \cos\lambda = 0,$$

où nous supposons qu'on a de nouveau remplacé $t - \frac{r}{a}$ par t, ce qui est permis parce que les équations sont valables pour toutes les valeurs de t et que les différentiations ne sont pas exécutées par rapport à r.

Pour un élément perpendiculaire à l'axe des x ces équations donneront

$$v' = 0, \quad w' = 0,$$

en vertu des équations

$$\cos\mu = 0, \quad \cos\nu = 0.$$

Les équations analogues déduites des autres équations par permutation des lettres donneront

$$\frac{\partial u'}{\partial y'} - \frac{\partial v'}{\partial x'} = 0, \quad \frac{\partial w'}{\partial x'} - \frac{\partial u'}{\partial z'} = 0.$$

Il faut donc qu'on ait, si les intégrales relatives à la surface doivent s'évanouir pour un élément perpendiculaire à l'axe des x, précisément les mêmes conditions que celles que donne la théorie de la lumière, et, comme on peut choisir la direction des axes arbitrairement, il faut que les conditions soient identiques pour tous les éléments de la surface du corps.

Si l'on admet ces conditions pour la surface de séparation, les intégrales relatives à cette surface s'évanouiront, et le calcul indiqué donnera alors

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \gamma}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial z}\right) = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} + \frac{16\pi k}{a^2}\frac{\partial \alpha}{\partial t}.$$

Si l'on pose, comme nous l'avons fait ci-dessus,

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} = -\frac{1}{2}\frac{\partial \overline{\Omega}}{\partial t},$$

et que de plus, dans le second membre de l'équation, on pose

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} = \Delta_2 \alpha + 4\pi u,$$

l'équation peut être écrite sous la forme

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \overline{\Omega}}{\partial x \partial t} = 4\pi u + \frac{16\pi k}{a^2}\frac{\partial \alpha}{\partial t}.$$

D'une manière analogue les deux autres équations (B) donneront

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y \partial t} = 4\pi v + \frac{16\pi k}{a^2}\frac{\partial \beta}{\partial t},$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \Omega}{\partial z \partial t} = 4\pi w + \frac{16\pi k}{a^2}\frac{\partial \gamma}{\partial t}.$$

En éliminant Ω entre les deux dernières équations, on obtiendra

$$\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{4k}{a^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \beta}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial y}\right),$$

équation qui est identique à la première équation (9). Les deux autres équations peuvent être formées d'une manière analogue.

Si au moyen de ces équations l'on élimine les quantités $\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}$, $\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}$, $\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}$ des équations (B), la première de celles-ci donnera, après intégration par rapport à t,

* NOTE 15. $$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \gamma}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial z}\right) = \frac{1}{4k}\frac{\partial u}{\partial t} + 4\pi u ,^*$$

qui est identique à la première équation (8), et et si l'on substitue ici à la place du dernier terme, en vertu de (5),

$$-4\pi u = \Delta_2 \alpha - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2},$$

en introduisant la fonction désignée par Ω, on obtiendra, après avoir de nouveau intégré par rapport à t,

$$u = -2k\left(\frac{\partial \Omega}{\partial x} + \frac{2}{a^2}\frac{\partial \alpha}{\partial t}\right).$$

En faisant $a = \frac{c}{\sqrt{2}}$, nous retomberons ainsi sur la première équation (A), et les deux autres peuvent être déduites d'une manière analogue. On a omis les constantes qu'il faudrait ajouter à cause des deux intégrations par rapport à t, car on voit aisément que de telles constantes seraient ici sans conséquence.* * NOTE 16.

Ces résultats fournissent une nouvelle démonstration du théorème de l'identité des vibrations lumineuses et des courants électriques, car nous voyons que non seulement on peut déduire les lois de la lumière de celles des courants électriques, mais qu'on peut aussi suivre la voie inverse, si l'on ajoute seulement les conditions aux limites qu'exige la théorie de la lumière.

On peut donc déterminer par le calcul seul l'action inductrice de l'électricité libre, définie par les équations (2) de Kirchhoff, et celle des courants électriques, en s'appuyant seulement sur les faits tirés de l'optique qui sont nécessaires pour établir les lois de la lumière, et en ajoutant aux équations différentielles relatives aux composantes de la lumière un terme unique, qui disparaît pour les corps parfaitement transparents. mais qui pour les bons conducteurs de l'électricité exprime une absorption de la lumière.

Sans vouloir approfondir ici les conséquences des résultats qui précèdent, résultats qui nous font faire un pas en avant dans la réalisation de l'idée de l'unité des forces physiques et ouvrent un nouveau champ aux recherches, je me bornerai, en terminant, à appeler l'attention sur les conclusions que nous pouvons émettre avec quelque probabilité sur le mode d'action de l'électricité et sur les points de vue auxquels nous pouvons nous

placer vis-à-vis des hypothèses physiques relatives à la lumière.

Si l'on cherchait à développer les lois des courants électriques de manière qu'elles fussent valables non seulement pour des corps homogènes à conductibilité constante, mais aussi pour un corps hétérogène quelconque, il paraît vraisemblable qu'on pourrait le faire en partant des équations différentielles (B), si l'on suppose que les quantités a et k soient variables. Cela serait d'accord avec les équations générales admissibles dans la théorie de la lumière pour des milieux hétérogènes; de plus ces équations différentielles impliqueraient les conditions qui doivent être remplies aux limites des corps homogènes, et l'on pourrait déduire ces conditions des équations différentielles elles-mêmes. Mais avec un tel point de départ, il serait impossible d'obtenir pour des corps hétérogènes des équations simples analogues à (A). Il serait alors nécessaire de considérer le système des équations (A) comme un cas spécial, admissible seulement pour les corps homogènes, tandis que dans le cas général il faudrait partir des équations différentielles, dont on pourrait seulement déduire l'explication physique. De là on pourrait tirer une conclusion importante pour la théorie de l'électricité et qui déjà est indiquée par la circonstance que l'action du courant électrique met un certain temps à se propager, à savoir que c'est seulement en apparence que les forces électriques agissent à distance, comme cela résulterait des équations (A) si elles étaient considérées comme fondamentales, et que toute action de l'électricité et des courants électriques ne dépend en réalité que de l'état électrique des éléments immédiatement ambiants, comme l'indiquent les équations

différentielles (B). Cette hypothèse a, comme on sait, déjà été proposée par Ampère et défendue par plusieurs savants, en particulier par Faraday.

On admet généralement que la lumière est un mouvement oscillatoire des molécules de l'éther. S'il en était ainsi, le courant électrique devrait aussi être un mouvement de l'éther dirigé dans le sens du courant (positif ou négatif). Mais il est impossible que les mêmes équations qu'établit la théorie pour de très petits écarts par rapport à la position d'équilibre puissent s'appliquer encore à des écarts quelconques. Or les développements qui précèdent montrent précisément que les mêmes équations doivent être valables dans les deux cas. La lumière ne peut donc pas consister en vibrations de l'espèce admise jusqu'ici, et cette dernière conséquence de la théorie de l'éther la rend insoutenable.

Mais il y a une autre manière de concevoir les vibrations de la lumière, que j'ai déjà exposée précédemment (Ann. de Pogg., t. 118, p. 113; p. 89 de cette édition), et à laquelle les résultats de ce travail donnent maintenant une plus grande vraisemblance. En effet, si nous supposons que la lumière est produite par des vibrations rotatoires dans l'intérieur des corps, autour d'axes ayant la même direction que celle que, d'après la théorie de l'élasticité, nous considérons comme le sens des vibrations, le courant électrique ne sera plus un mouvement de translation, mais un mouvement rotatoire dirigé dans un seul sens, et la direction de l'axe de rotation sera celle du courant. Cette rotation n'est continue que dans les corps bons conducteurs de l'électricité, et le mouvement s'y propage dans la direction de l'axe, tandis que dans les corps mauvais conducteurs il est périodique et

se propage par induction dans un sens perpendiculaire à l'axe de rotation. Avec cette théorie, il n'y a plus de raison de maintenir l'hypothèse d'un éther, puisqu'on peut très bien admettre que l'espace renferme assez de matière pondérable pour que le mouvement puisse s'y propager.

Il est possible que l'hypothèse que nous venons d'exposer sur la nature de la lumière et des courants électriques prenne une autre forme à mesure que la science fera de nouveaux progrès, mais le résultat auquel nous ont conduit nos recherches, savoir que *les vibrations de la lumière sont des courants électriques*, ne repose sur aucune hypothèse physique et en est par conséquent tout à fait indépendante.

NOTES.

NOTE 1. Une critique du mémoire se trouve dans les „Fortschritte der Physik“, t. 23, p. 197.

NOTE 2. Pour comprendre les notations employées dans ce mémoire, on doit remarquer qu'elles sont celles de Weber. La valeur de l'intensité d'un courant n'est d'après Weber que la moitié de celle que lui attribue Maxwell (voir Maxwell: Electricity and magnetism, § 231); chez Weber, c désigne la vitesse avec laquelle un élément e d'électricité doit se rapprocher d'un autre pour qu'il n'exerce aucune répulsion sur cet élément e', cette répulsion étant déterminée par la formule

$$\frac{ee'}{r^2}\left[1+\frac{1}{c^2}\left(2r\frac{d^2r}{dt^2}-\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right)\right],$$

où r est la distance des deux éléments et t le temps. Mais si a est le nombre d'unités électrostatiques d'électricité contenu dans une unité électrodynamique, on doit avoir $c = a\sqrt{2}$. La conductibilité k a une valeur qui n'est que le quart de celle qu'on appelle ordinairement la conductibilité.

De plus on doit remarquer que toutes les quantités sont données en unités électrostatiques. (Voir: Electrodynamische Maassbestimmungen. Abh. Leibnizens Ges.

Leipzig 1846. Maxwell: Electricity and magnetism, §§ 846—860.)

En ce qui concerne l'expression $\frac{4}{c^2}\frac{dU}{dt}$ et les expressions analogues relatives à l'action inductrice des courants, Kirchhoff ne dit rien (Pogg. Ann., t. 102) de la manière dont il déduit ses équations, mais leur forme fait voir assez clairement qu'il les conclut par induction de celles de Weber pour des courants linéaires (voir Maxwell: Electricity and magnetism, § 860, formule 30) en supposant que les conducteurs sont en repos.

Or on reconnaît qu'on serait également d'accord avec les formules de Weber en posant

$$U = \iiint \frac{dx'dy'dz'}{r^3}(x-x')\left[u'\left(t-\frac{r}{a}\right)(x-x')+v'\left(t-\frac{r}{a}\right)(y-y')+w'\left(t-\frac{r}{a}\right)(z-z')\right]$$

etc.

NOTE 3. La seconde équation suppose que le corps considéré est entouré de corps non conducteurs.

NOTE 4. Weber a trouvé $c = 439450$ kilomètres ou 59320 milles géographiques ($\frac{1}{15}$ de degré équat.); mais 1 mille $=$ 7420,4 mètres, et par conséquent 439450 kilom. $=$ 59222 milles et non 59320. (Voir Weber et Kohlrausch: Electrodynamische Maassbestimmungen. Abh. der sächs. Gesellsch. d. Wiss. III. Leipzig 1857, p. 264.)

NOTE 5. Lorenz pourrait tout aussi bien se servir comme point de départ des équations (A) que des équations (1). Car les équations (A) découleraient des équations de Neumann relatives à l'induction, de même que les équations (1) dérivent de celles de Weber, si l'on

supposait toutefois que u', etc., sont les valeurs des composantes du courant au point (x', y', z') au moment où se produit l'influence au point (x, y, z).

Les équations de Lorenz ne seraient alors qu'une modification de celles de Neumann, si l'on supposait que la force inductrice met un certain temps pour se propager d'un point à un autre.

Du reste les équations de Neumann et celles de Weber relatives à un courant linéaire sont identiques, si l'on ne tient compte que des courants fermés.

NOTE 6. On voit presque immédiatement l'exactitude du théorème, car on aura

$$\Delta_2 \frac{1}{r} \varphi\left(t - \frac{r}{a}\right) = \varphi\left(t - \frac{r}{a}\right) \Delta_2 \frac{1}{r} + \frac{1}{a^2} \varphi''\left(t - \frac{r}{a}\right),$$

et par suite

$$\left(\Delta_2 - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \iiint \frac{dx'dy'dz'}{r} \varphi\left(t - \frac{r}{a}, x', y', z'\right)$$
$$= \iiint \varphi\left(t - \frac{r}{a}, x', y', z'\right) \Delta_2 \frac{1}{r} dx'dy'dz';$$

mais, d'après un théorème bien connu, cette intégrale est nulle si le point (x', y', z') ne se trouve pas entre les limites de l'intégrale, et égale à $-4\pi\varphi(t, x, y, z)$ dans le cas contraire.

NOTE 7. Les équations (6) entraînent $\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = 0$, et ce qui suit montre que Lorenz suppose $\varepsilon = 0$.

NOTE 8. $\frac{c}{\sqrt{2}} = 41945$ milles si $c = 59320$ milles, et $\frac{c}{\sqrt{2}} = 310738$ kilom. si $c = 439450$ kilom.

NOTE 9. Dans l'équation

$$\frac{\partial}{\partial t}\varepsilon'\left(t-\frac{r}{a}\right)=-2\left(\frac{\partial}{\partial x'}u'\left(t-\frac{r}{a}\right)+\frac{\partial}{\partial y'}v'\left(t-\frac{r}{a}\right)+\frac{\partial}{\partial z'}w'\left(t-\frac{r}{a}\right)\right),$$

les différentiations $\frac{\partial}{\partial x'}$ doivent être exécutées comme si r était une constante.

Par conséquent on aura

$$\frac{\partial}{\partial x'}=\frac{\partial}{\partial x'}+\frac{\partial}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x'}.$$

Mais dans l'expression en question la quantité x n'entre que dans r, et par conséquent, comme $r^2=(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2$, on aura

$$\frac{\partial r}{\partial x'}=-\frac{\partial r}{\partial x},\quad \frac{\partial}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x'}=-\frac{\partial}{\partial x},$$

et par suite

$$\frac{\partial}{\partial x'}=\frac{\partial}{\partial x'}-\frac{\partial}{\partial x},\quad \frac{\partial}{\partial x'}=\frac{\partial}{\partial x'}+\frac{\partial}{\partial x}.$$

En introduisant cette expression de $\frac{\partial}{\partial x}$ et les expressions analogues dans l'expression de $\frac{\partial \Omega}{\partial t}$, on obtiendra

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Omega}{\partial t}=-2\iiint\frac{dx'dy'dz'}{r}&\left(\frac{\partial}{\partial x'}u'\left(t-\frac{r}{a}\right)+\frac{\partial}{\partial y'}v'\left(t-\frac{r}{a}\right)+\frac{\partial}{\partial z'}w'\left(t-\frac{r}{a}\right)\right.\\&\left.+\frac{\partial}{\partial x}u'\left(t-\frac{r}{a}\right)+\frac{\partial}{\partial y}v'\left(t-\frac{r}{a}\right)+\frac{\partial}{\partial z}w'\left(t-\frac{r}{a}\right)\right)\\&-2\int\frac{ds'}{r}\left[u'\left(t-\frac{r}{a}\right)\cos\lambda+v'\left(t-\frac{r}{a}\right)\cos\mu+w'\left(t-\frac{r}{a}\right)\cos\nu\right],\end{aligned}$$

et en intégrant par parties, et remarquant que $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ sont les cosinus directeurs de la normale à la surface de séparation, la direction positive de la normale étant tournée vers l'intérieur du corps, on trouvera

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} = 2\iiint dx'dy'dz'\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} u'\left(t - \frac{r}{a}\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial x} u'\left(t - \frac{r}{a}\right)\right)$$

$$+ 2\iiint dx'dy'dz'\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'} v'\left(t - \frac{r}{a}\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial y} v'\left(t - \frac{r}{a}\right)\right)$$

$$+ 2\iiint dx'dy'dz'\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'} w'\left(t - \frac{r}{a}\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial z} w'\left(t - \frac{r}{a}\right)\right)$$

$$- 2\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z}\right).$$

NOTE 10. On aura, en vertu des équations (7),

$$\omega^2 = \frac{p^2 a^4}{64\pi^2 k^2 + a^2 p^2},$$

et, si k est grand en comparaison de ap, approximativement

$$\omega = \frac{pa^2}{8\pi k},$$

et par suite

$$8\pi k \omega = pa^2 = a^2 h,$$
$$h = p.$$

Si la durée d'une oscillation est T, on aura $T = \frac{2\pi}{p\omega}$, et, comme $\lambda = T\omega$,

$$p = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

On doit pourtant remarquer que $h = p$ (approximativement) entraîne approximativement $\omega = 0$.

NOTE 11. La conductibilité du cuivre étant $\frac{1}{274100}$ (voir Weber et Kohlrausch: Elektrodynamische Maass-

bestimmungen. Abh. d. sächs. Gesellsch. d. Wissensch. III, p. 274), on aura

$$\frac{1}{274100} \cdot \frac{c^2}{8} = 283417\,a.$$

Du reste le calcul est dépourvu d'intérêt, car bien que Lorenz dise que $\frac{2\pi}{\lambda}a$ est petit en comparaison de $283417\,a$, on ne sait pourtant s'il en est ainsi, la longueur d'onde dans le cuivre étant inconnue. Si en effet l'on a approximativement $h = p$, ω est nécessairement petit en comparaison de a, et par conséquent λ sera très petit, si la durée d'une oscillation est la même dans l'air et dans le cuivre.

NOTE 12. Le raisonnement de Lorenz montre qu'il ne peut pas se développer d'électricité libre dans un corps où le mouvement de l'électricité est périodique, mais autrement il est bien possible que la quantité d'électricité libre dans le corps ne soit pas nulle.

Voir Kirchhoff: Ueber die Bewegung der Elektricität in Leitern (Pogg. Ann., t. 102, p. 532).

NOTE 13. Cela veut dire qu'on reconnaîtra que les équations (A) ne peuvent être déduites des équations (B) que si l'on ajoute des conditions aux surfaces de séparation identiques à celles qu'on trouvera dans Pogg. Ann., t. 118, p. 126, cette édition p. 104, pourvu que le corps considéré soit entouré d'un milieu absolument non conducteur.

NOTE 14. On trouvera comme précédemment (note 9)

$$\frac{\partial}{\partial y'} = \frac{\partial}{\partial y'} + \frac{\partial}{\partial y}$$

et par conséquent

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y'^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial y\, \partial y'} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

On aura donc

$$\iiint \frac{dx'dy'dz'}{r}\frac{\partial^2}{\partial y'^2}u'\left(t - \frac{r}{a}\right)$$

$$= \iiint \frac{dx'dy'dz'}{r}\left(\frac{\partial^2}{\partial y'^2}u'\left(t - \frac{r}{a}\right) + 2\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial y'}u'\left(t - \frac{r}{a}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}u'\left(t - \frac{r}{a}\right)\right).$$

Si nous appelons P cette expression, on obtiendra, en intégrant le premier terme par parties,

$$P = -\int \frac{ds' \cos\mu}{r}\frac{\partial}{\partial y'}u'\left(t - \frac{r}{a}\right)$$

$$+ \iiint dx'dy'dz'\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y'}u'\left(t - \frac{r}{a}\right) + 2\frac{\partial^2}{\partial y\partial y'}u'\left(t - \frac{r}{a}\right)\frac{1}{r} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}u'\left(t - \frac{r}{a}\right)\frac{1}{r}\right),$$

et

$$\iiint dx'dy'dz'\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y'}u'\left(t - \frac{r}{a}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial y\partial y'}u'\left(t - \frac{r}{a}\right)\right)$$

$$= \frac{\partial\left(\iiint \frac{dx'dy'dz'}{r}\frac{\partial}{\partial y'}u\left(t - \frac{r}{a}\right)\right)}{\partial y}$$

$$= -\frac{\partial\left(\int \frac{ds'\cos\mu}{r}\, u'\left(t - \frac{r}{a}\right)\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(\iiint dx'dy'dz'\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}u'\left(t - \frac{r}{a}\right)\right)}{\partial y},$$

$$\iiint \frac{dx'dy'dz'}{r}\left(\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial y'}u'\left(t-\frac{r}{a}\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}u'\left(t-\frac{r}{a}\right)\right)$$
$$=-\int\frac{ds'\cos\mu}{r}\frac{\partial}{\partial y}u'\left(t-\frac{r}{a}\right)$$
$$+\iiint dx'dy'dz'\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}u'\left(t-\frac{r}{a}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial y^2}u'\left(t-\frac{r}{a}\right)\right)$$
$$=-\int\frac{ds'\cos\mu}{r}\frac{\partial}{\partial y}u'\left(t-\frac{r}{a}\right)+\frac{\partial\iiint\frac{dx'dy'dz'}{r}\frac{\partial}{\partial y}u'\left(t-\frac{r}{a}\right)}{\partial y}$$

Par suite on aura

$$P=-\int\frac{ds'\cos\mu}{r}\left(\frac{\partial}{\partial y'}u'\left(t-\frac{r}{a}\right)+\frac{\partial}{\partial y}u'\left(t-\frac{r}{a}\right)\right)$$
$$-\frac{\partial\int\frac{ds'\cos\mu}{r}u'\left(t-\frac{r}{a}\right)}{\partial y}+\frac{\partial^2\left(\iiint\frac{dx'dy'dz'}{r}u'\left(t-\frac{r}{a}\right)\right)}{\partial y^2}$$
$$=-\int\frac{ds'\cos\mu}{r}\frac{\partial}{\partial y'}u'\left(t-\frac{r}{a}\right)-\frac{\partial\int\frac{ds'\cos\mu}{r}u'\left(t-\frac{r}{a}\right)}{\partial y}$$
$$+\frac{\partial^2\left(\iiint\frac{dx'dy'dz'}{r}u'\left(t-\frac{r}{a}\right)\right)}{\partial y^2}.$$

NOTE 15. On suppose ici (deux fois) que la constante arbitraire introduite par l'intégration est nulle. (Voir la remarque faite plus bas dans le texte.)

NOTE 16. Il sera naturel de faire ici, à la fin du développement mathématique de la théorie électromagnétique de la lumière de Lorenz, une comparaison de cette théorie avec celle de Maxwell, en premier lieu parce que cette comparaison n'a pas été faite jusqu'ici et en second lieu parce qu'on n'a pas remarqué la diffé-

rence des deux théories, mais qu'on a jusqu'à présent supposé qu'elles étaient identiques au fond.

Maxwell s'exprime ainsi sur la théorie de Lorenz dans le tome II de son „Treatise on electricity and magnetism“ (3e édition, p. 449):

„Dans un mémoire publié dans les Annales de Poggendorf, juillet 1867, p. 243--263, M. Lorenz a, en ajoutant quelques termes insignifiants par rapport aux expériences, déduit des équations de Kirchhoff un nouveau système d'équations relatives aux courants électriques (Pogg. Ann., t. 102, 1857). Ces nouvelles équations expriment que la distribution des forces dans le champ électromagnétique peut être regardée comme une conséquence de l'influence mutuelle des éléments voisins, et que des ondulations, composées de courants électriques transversaux, peuvent se propager dans les corps non conducteurs avec une vitesse comparable à celle de la lumière. Il regarde pour cette raison la perturbation qui constitue la lumière comme identique avec ces courants électriques, et il montre que les corps conducteurs doivent être opaques pour de tels rayonnements.

Ces conclusions ressemblent à celles qui sont exposées dans ce chapitre, quoiqu'elles soient déduites d'une manière tout à fait différente. La théorie que j'ai développée dans ce chapitre a été publiée pour la première fois dans les Phil. Trans. 1865, p. 459—512“.

Ce passage fait voir, ce me semble, que Maxwell est d'avis que la différence entre sa théorie et celle de Lorenz porte sur la forme et non sur le fond, tandis que, comme je le démontrerai dans ce qui suit, c'est précisément le fond qui diffère.

Maxwell et Lorenz ont développé leurs théories,

dont les résultats sont essentiellement identiques, indépendamment l'un de l'autre. La théorie de Maxwell, communiquée à la Royal Society dans la séance du 8 décembre 1864 sons le titre „A dynamical theory of the electromagnetic field", a été publiée à peu près deux ans avant celle de Lorenz, qui a été communiquée à la Société royale des sciences de Copenhague dans la séance du 25 janvier 1867.

On sait qu'un courant électrique peut induire dans un corps un nouveau courant, et que ce nouveau courant ne dépend pas de la valeur absolue du courant primitif, mais de la variation de ce courant. Les deux théories dépendent en réalité des lois des courants induits, mais ces lois sont interprétées dans l'une et dans l'autre d'une manière différente.

Nous examinerons d'abord comment Maxwell interprète ces lois et le fondement de la théorie électromagnétique de la lumière qu'il en déduit.

Le trait fondamental de sa théorie est la différence des actions qu'une force électromotrice exerce sur un corps conducteur et sur un corps non conducteur (ou plutôt un diélectrique). Dans un corps conducteur une force électromotrice produira un certain courant électrique, c'est-à-dire que, si la force électromotrice ne varie pas, la même quantité d'électricité passera dans chaque unité de temps par une tranche quelconque du corps. Un tel courant se nomme courant de conduction.

Dans un corps non conducteur (un diélectrique), une force électromotrice constante produira au contraire un déplacement de l'électricité, c'est-à-dire qu'au moment où cette force électromotrice commence d'agir sur le corps, l'électricité passera instantanément d'une position

d'équilibre à une autre. De plus le déplacement est proportionnel à l'intensité de la force électromotrice.

Par conséquent un courant électrique ne se produira dans un tel corps que si l'intensité de la force électromotrice varie, et l'intensité du courant dépendra de la vitesse de la variation de la force électromotrice et de la nature du corps. Un tel courant se nomme courant de déplacement.

En général, les corps ne sont ni parfaitement conducteurs ni parfaitement diélectriques. Le courant réel dans un corps est par conséquent composé d'un courant de conduction et d'un courant de déplacement.

Lorenz, au contraire, ne fait pas cette distinction entre l'influence d'une force électromotrice sur les corps conducteurs et sur les corps non conducteurs. Les diélectriques ne sont, d'après lui, que des corps mauvais conducteurs.

Mais les résultats des deux savants étant les mêmes, cela provient d'une seconde différence fondamentale entre leurs théories.

Maxwell ne tient pas compte du temps nécessaire pour que l'action inductrice d'un courant électrique puisse se propager d'un point de l'espace à un autre, tandis que Lorenz tient compte de ce temps. C'est ce qu'on reconnaît en considérant l'expression de Maxwell relative à l'intensité électromotrice en un point (x, y, z) (Electricity and magnetism, t. II, § 598 et § 616); car il pose, P étant la composante de cette intensité parallèle à l'axe des x (en négligeant quelques quantités qui n'influent pas sur la forme définitive de l'équation, et en supposant que le corps parcouru par les courants électriques est en repos)

$$P = -\frac{\partial F}{\partial t}$$

et

$$F = \mu \iiint \frac{u'}{r}\, dx'dy'dz',$$

où u' et r ont la même signification que dans le mémoire de Lorenz et où μ est une constante (la constante de perméabilité).

Lorenz pose comme Maxwell

$$P = -\frac{\partial F}{\partial t},$$

mais

$$F = \iiint \frac{u'\left(t - \frac{r}{a}\right)}{r}\, dx'dy'dz',$$

en supposant que l'action inductrice met un certain temps $\frac{r}{a}$ à se propager du point (x', y', z') à (x, y, z), ou qu'elle se progage avec la vitesse a.

Après avoir développé les expressions de l'intensité électromotrice, on peut facilement déduire les équations différentielles qui expriment les lois des courants induits.

Dans le cas où le corps n'est ni parfaitement conducteur ni parfaitement diélectrique, Maxwell pose

$$u = CP + \frac{K}{4\pi}\frac{\partial P}{\partial t} = -\left(C\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{K}{4\pi}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}\right)$$

où C et K sont des constantes. C est la conductibilité, K la constante de diélectricité, qui est nulle si le corps est un conducteur parfait. Cette équation exprime que le courant total se compose d'un courant de conduction et d'un courant de déplacement. Mais en vertu de l'expression de F, on aura

$$\Delta_2 F = -4\pi u$$

ır conséquent

$$\Delta_2 u = 4\pi\mu C \frac{\partial u}{\partial t} + \mu K \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Pour l'air, μ est, dans le système électrostatique, égal a ayant la même valeur que dans le mémoire de nz, et K est égal à 1.

La valeur de C est, d'après Maxwell, $4k$, comme je lit dans la note 2.

Lorenz suppose au contraire (en négligeant des tités qui n'ont pas d'influence sur le résultat)

$$u = \frac{4k}{a^2} \frac{\partial F}{\partial t}$$

les équations (A)), et en appliquant l'opération $\frac{1}{a^2}\frac{\delta^2}{\partial t^2}$ aux deux membres de l'équation, on obtiendra

$$\Delta_2 u = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{16\pi k}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t}.$$

On voit donc que pour l'air les équations de Max- et de Lorenz sont identiques. Lorenz ne tient pas ɔte de la perméabilité et de la constante de diélec- é, mais il est évident qu'en supposant que la vitesse ɪropagation de l'action inductrice diffère dans les ·ents corps, on pourrait obtenir une concordance ɔlète entre l'équation de Lorenz et celle de Maxwell.

Comme résultat de ces recherches on reconnait que ases des théories électromagnétiques de la lumière ɹorenz et de Maxwell diffèrent tout à fait et que othèse de Maxwell relative à la différence d'action ɜ force électromotrice sur un corps conducteur et ın diélectrique n'est pas nécessaire pour le développe- d'une théorie électromagnétique de la lumière, mais

qu'elle peut être remplacée par la supposition qu'il faut un certain temps à la propagation d'une action inductrice d'un point à un autre.

On voit que l'exposition des théories de Maxwell et de Lorenz présentée dans cette note diffère considérablement des développements de l'un et de l'autre savant. Si nous l'avons adoptée ici, c'est qu'elle nous a paru la plus propre à faire ressortir la différence des deux théories.

RECHERCHES EXPÉRIMENTALES ET THÉORIQUES

SUR

LES INDICES DE RÉFRACTION.

(PREMIER MÉMOIRE.)

RECHERCHES EXPÉRIMENTALES ET THEORIQUES SUR LES INDICES DE RÉFRACTION.*

* NOTE 1

VIDENSK. SELSK. SKR., T. VIII (5). COPENHAGUE 1869.

Par une série d'expériences dont les présentes forment la première partie, actuellement achevée, j'ai avant tout eu en vue de rechercher la constitution moléculaire des corps en étudiant leurs propriétés optiques et en particulier leurs réfraction et leur dispersion. J'ai cherché à atteindre mon but aussi bien par la voie de l'expérience que par celle de la théorie.

En ce qui concerne les indices de réfraction, le nombre des expériences qu'on peut utiliser est déjà très considérable, et ce nombre s'est en particulier dans les dernières années augmenté par beaucoup de contributions importantes dues à d'habiles observateurs. On reconnaît pourtant bientôt que les petites quantités dont dépend essentiellement la théorie n'ont pas été déterminées avec une précision assez grande, en partie parce qu'on n'a pas suffisamment tenu compte de l'influence considérable de la dispersion sur les résultats, en partie parce qu'on ne peut obtenir la précision nécessaire pour le développement de la théorie que par la combinaison de deux méthodes, celle du prisme, dont on se sert en général

pour déterminer les indices de réfraction, et celle des interférences, qui est beaucoup plus exacte.

C'est pourquoi j'ai cherché à déterminer l'influence de la dispersion avec plus de soin qu'on n'a jusqu'ici jugé nécessaire d'en apporter, et en même temps j'ai fait une série d'expériences où j'ai appliqué la dernière méthode pour déterminer les variations de l'indice de réfraction de l'eau aux différentes températures.

Mais s'il faut regretter le défaut d'expériences, on a encore davantage à regretter l'absence d'une théorie susceptible de montrer la relation entre l'indice de réfraction des corps et leur état moléculaire; car le premier essai de théorie fait en ce genre par Laplace ayant perdu son importance en même temps que la théorie de l'émission, on a dû depuis se contenter d'exposer et d'examiner des formules tout à fait empiriques, parmi lesquelles $(n^2 - 1) v = \text{const.}$ et $(n - 1) v = \text{const.}$, où n est l'indice de réfraction et v le volume, ont conservé quelque valeur et une certaine admissibilité.

Dans un mémoire précédent sur la théorie de la lumière (Pogg. Ann., t. 121; cinquième mémoire de cette édition) j'ai déjà cherché à développer une théorie approximative de l'indice de réfraction; mais c'est seulement dans le présent mémoire que j'ai réussi à surmonter tout à fait les difficultés qui se présentent quand on cherche à pousser cette théorie jusqu'au bout sans faire d'hypothèses particulières et restrictives sur l'état moléculaire des corps. La théorie de la dispersion, qui n'est pas traitée dans ce mémoire, sera l'objet d'une étude séparée.

I.

L'indice de réfraction de l'eau à différentes températures.

L'indice de réfraction d'un corps diminue en général si le corps se dilate en passant d'une température à une autre. On trouve pourtant quelques exceptions à cette règle, ce qu'ont démontré en premier lieu Rudberg et plus tard Fizeau pour le spath d'Islande, le dernier aussi pour quelques espèces de verre, et Jamin pour l'eau à une température comprise entre 0° et 4° C. Mais comme les variations de la dispersion n'ont pas été explorées pour les premiers de ces corps (car Rudberg dit seulement que la dispersion du spath d'Islande ne semble pas varier par l'échauffement), et comme pour l'eau non plus ces variations n'ont pas été déterminées avec la précision exigée par de si petites variations de volume, la question n'est pas tranchée jusqu'ici de savoir si ces exceptions sont des phénomènes de dispersion ou bien en réalité des variations de la réfraction, même délivrée de la dispersion.

Si n est l'indice de réfraction correspondant à une couleur déterminée, dont la longueur d'onde est λ dans l'espace dépourvu de dispersion, n^2 et par suite n peuvent, comme Cauchy l'a démontré le premier, être développés en série suivant les puissances croissantes de $\frac{1}{\lambda^2}$. Par conséquent, si l'on pose

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4} + \dots, \qquad (1)$$

où A, B, C, ... sont des constantes indépendantes de la longueur d'onde, on peut regarder comme prouvé par l'expérience que parmi ces constantes il y en a au moins quelques-unes qui dépendent non seulement de la densité des corps, mais encore de leur température.

Ainsi l'indice de réfraction de l'eau n'est pas le mêm à 0° et à une température de 8° à 9°, tandis que l volume de l'eau est pourtant le même à ces deux tempé ratures. Mais nous ne savons pas si cette loi est valabl pour toutes les constantes et en particulier si elle es valable pour la première.

Soit A cette constante qui désigne l'indice de réfrac tion correspondant à une longueur d'onde infinimen grande, et que nous appellerons l'indice réduit de réfrac tion. Il importe beaucoup de déterminer cette constant avec précision pour les différents corps, et avant tou on doit résoudre le problème important de détermine par des expériences si cette constante est seulement fonc tion du volume spécifique du corps.

Soit dA la variation totale de l'indice de réfractio réduit produite par les variations simultanées dv et d du volume et de la température; on aura, en désignan par δ les différentiations partielles,

$$dA = \frac{\delta A}{\delta v} dv + \frac{\delta A}{\delta t} dt. \qquad (2$$

Il s'agit à présent de trancher par l'expérience l question de savoir si $\frac{\delta A}{\delta t}$ est nul ou non. D'après les re marques faites ci-dessus, la question ne peut pas êtr considérée comme résolue par les expériences faite jusqu'ici, et il ne serait pas légitime d'en conclure qu c'est le dernier cas qui a lieu en réalité, car ces expérience n'ont de valeur que pour l'indice de réfraction compos n. Au contraire les phénomènes présentés par les ga plaident en faveur de la première supposition, car semble que leurs indices de réfraction soient complète ment indépendants de la température si les volume

ne varient pas. Mais cette question non plus ne peut être considérée comme complètement tranchée par les expériences faites jusqu'à présent, et il faut vraisemblablement pour résoudre la question un examen plus approfondi que celui qu'on lui a consacré jusqu'ici.

Le corps qui après les gaz est le plus propre à donner une solution du problème de l'influence immédiate de la chaleur sur l'indice réduit de réfraction est sans aucun doute l'eau, d'abord parce que son volume ne varie qu'extrêmement peu à des températures peu élevées, ce qui fait qu'on peut mieux y observer l'influence de la chaleur indépendamment de la variation du volume; ensuite parce qu'elle a un maximum de densité et que sa dilatation est en général très irrégulière, et que par là elle fournit une occasion favorable de rechercher si les mêmes irrégularités ou les mêmes lois ont lieu pour les variations de l'indice de réfraction entre les limites des très petites variations du volume aux températures peu élevées. Ajoutons à cela que la dilatation de l'eau a été déterminée avec une précision extrêmement grande, en particulier par Matthiessen (Pogg. Ann., t. 128). Pour ces raisons il n'est pas étonnant que l'indice de réfraction de l'eau ait été l'objet de expériences très soigneuses d'un si grand nombre de savants, expériences sur lesquelles j'insisterai davantage dans ce qui suit.

Les expériences faites avec le prisme sur l'indice de réfraction de l'eau ne sont cependant pas suffisantes, parce qu'on ne peut de cette manière obtenir une précision comparable à celle avec laquelle on a déterminé le volume de l'eau à différentes températures. Jamin seul, qui le premier a rendu la méthode des interférences

pratiquement applicable, s'en est servi dans ce but, mais lui non plus n'a pas réussi à obtenir une grande precision, ce qu'on reconnait déjà par la forme de ses résultats, les variations de l'indice de réfraction n'étant indiquées que pour la lumière blanche. Cependant il est évident, comme cela ressort immédiatement de ces expériences, que l'indice de réfraction de l'eau pour la lumière visible n'a pas de maximum à 4°.

La méthode imaginée par Jamin consiste en ce que la lumière frappe sous une direction oblique une lame de verre à faces parallèles, ce qui fait que chaque rayon de lumière est divisé en deux rayons parallèles, dont l'un est réfléchi par la face antérieure du miroir, et dont l'autre au contraire est réfracté, puis réfléchi par la face postérieure, qui en général est recouverte d'un miroir de métal. Ces deux rayons se superposent de nouveau en frappant un autre miroir parallèle au premier et ayant la même épaisseur, le premier rayon faisant ici le même chemin que le second a fait dans le premier miroir et *vice versa*. Si l'on fait passer les deux rayons séparement par deux tubes situés côte à côte, de même longueur et remplis d'eau, on pourra observer, en notant le déplacement des franges d'interférence produites par la réunion des rayons, toute variation de l'indice de réfraction dans l'un ou l'autre de ces deux tubes.

Dans les expériences projetées il fallait que la température de l'eau fût différente dans les deux tubes; pour cette raison il importait que les deux rayons fussent séparés l'un de l'autre par un intervalle assez grand, et par conséquent les deux miroirs devaient avoir une épaisseur considérable. C'est pourquoi je ne me suis pas servi, comme on l'a fait jusqu'ici, de deux miroirs taillés

dans une pièce de verre à faces parallèles, mais je les ai remplacés par deux cubes polis sur quatre faces, que j'ai fait fabriquer chez M. le directeur Merz à Munich. Ces miroirs étaient à tous égards admirablement bien exécutés et ne présentaient qu'une très petite différence dans leurs dimensions, qui étaient données de $1\frac{1}{2}$ pouce (mesure francaise). Par des mesures au sphéromètre j'ai trouvé les nombres suivants pour la distance de deux surfaces opposées:

Cube *A*	Cube *B*
103,052	103,024
102,970	102,915.

Par conséquent j'ai trouvé à peu près 103 degrés du sphéromètre pour toutes les surfaces, ce qui correspond à $41^{mm},57$. Pour examiner en même temps si la masse du verre était identique dans les deux cubes, on les plaça côte à côte, serrés l'un contre l'autre, chacun devant sa fente, et on observa au moyen d'une lunette le spectre d'interférence. Le déplacement de la frange centrale de ce spectre produit par l'inégale épaisseur des deux cubes se montra à tous égards, tant en grandeur qu'en direction, d'accord avec les mesures citées, d'où l'on peut conclure que les indices de réfraction des deux cubes doivent être tout à fait identiques. De plus on pouvait juger par la régularité des franges de la pureté et de l'homogénéité parfaites de la masse de verre.

Comme surfaces réfléchissantes j'ai choisi celles dont les distances différaient le moins (103,052 et 103,024). La différence était $0^{mm},011$. On argenta les deux surfaces qui devaient servir de faces postérieures.

Comme source de lumière j'ai employé des flammes monochromatiques de sodium et de lithium. Dans une

solution concentrée de chlorure de sodium fut placée, d'après la méthode indiquée par Ketteler (Ueber die Farbenzerstreuung der Gase), une mèche d'amiante qui fut approchée d'un bec de Bunsen. Outre cette lumière jaune je me suis encore servi d'une lumière mixte jaune et rouge, que j'ai obtenue au moyen d'une solution concentrée de chlorure de lithium contenant un peu de chlorure de sodium. J'ai encore de différentes manières fait des expériences avec une flamme de thallium; mais quoique j'aie obtenu de belles franges d'interférence, tant que les rayons interférents n'ont traversé que l'air, il ne me fut pas possible, quand les colonnes d'eau étaient interposées, d'obtenir des franges d'une netteté suffisante pour qu'on pût s'en servir pour des mesures exactes.

L'un des deux cubes *A* (fig. 1, pag. 223) fut fixé dans une position invariable à un solide support de fer, l'autre *B* fut placé au centre d'un disque horizontal divisé, de 200mm de diamètre, qui pouvait tourner autour d'un axe vertical et être réglé exactement au moyen d'une vis horizontale *c*, qui s'engrenait avec le contour. Le support reposait sur trois vis calantes verticales, et la base pouvait être déplacée horizontalement dans une direction perpendiculaire à la ligne qui joignait les deux cubes. Après avoir assuré la verticalité des faces réfléchissantes, on produisit des franges d'interférence avec la flamme de sodium dans *L* en réglant la position du cube *B*; puis on chercha, en déplaçant la base du support et en changeant la position de la flamme, à trouver l'angle d'incidence le plus avantageux; cet angle d'incidence fut choisi un peu plus petit que 45°. Les franges, qui étaient visibles à l'œil nu, furent agrandies et rendues plus distinctes par l'emploi de deux lentilles *a* et *b*.

La première, qui était munie d'un réticule, était convergente et sa distance focale était de 320^{mm}; l'autre, placée à quelque distance de la première, était plus petite et avait une distance focale de 40^{mm}: c'est avec cette lentille que furent observées les images agrandies des franges et du réticule.

Ce système a été reconnu ici le plus avantageux. L'interposition d'une lentille convergente entre la flamme et le premier cube s'est montrée peu pratique. A cause du défaut inévitable de parallélisme des surfaces réfléchissantes, c'est dans une position déterminée, à savoir quand elles faisaient un angle de 60° avec l'horizon, que les franges ont apparu le plus nettement. En faisant tourner les vis verticales sur lesquelles reposait le support, on pouvait rendre les franges plus ou moins verticales et en même temps on pouvait au moyen de la vis horizontale régler leur déplacement jusqu'à une petite fraction de la largeur d'une frange. Les franges obliques apparurent rectilignes, et, regardées comme si elles étaient à la distance de la vision distincte, elles étaient séparées par un espace de 3^{mm}. On pouvait en même temps observer près de 20 franges, quand les tubes étaient intercalés entre les cubes, et ces franges étaient partout également distinctes dans le champ de vision rectangulaire. Outre ces franges on pouvait encore, quand les tubes n'étaient pas intercalés entre les cubes, observer à quelque distance des premières deux autres systèmes de franges plus étroites, qu'on déplaçait dans la direction opposée à celle des premières en faisant tourner le cube. L'un de ces systèmes était produit par l'interférence de deux rayons, dont chacun était réfléchi d'abord par la surface antérieure de l'un des cubes et ensuite trois fois à

l'intérieur de l'autre: savoir une première fois en totalité par l'une des surfaces latérales du cube, une seconde fois par la surface postérieure recouverte du miroir et enfin de nouveau en totalité par l'autre surface laterale. La petite perte d'intensité lumineuse due à ces reflexions et la forme parfaite des cubes ont permis d'observer ces franges très distinctement. Pour la même raison on pouvait encore observer distinctement un troisième système de franges, qui apparut immédiatement à coté du précédent et qui devait être produit par une sextuple réflexion intérieure.

Une autre observation, que j'eus l'occasion de faire avec ces cubes avant qu'ils fussent argentés, n'est peut-être pas dépourvue d'intérêt. Ils furent disposés d'une manière semblable à celle qui a été decrite ci-dessus, mais tournés de manière que les diagonales fussent situées dans le prolongement l'une de l'autre. La flamme de sodium fut placée derrière l'un des cubes dans la direction de la ligne qui les joignait, et la lumière, frappant l'arête la plus proche du premier cube, y fut réfractée par les deux surfaces dans deux directions différentes et sortit du cube en deux rayons parallèles distants de plus d'un pouce. Ces deux rayons furent interceptés par l'autre cube et sortirent par l'arête opposée à une petite distance l'un de l'autre. On pouvait par conséquent observer ici au moyen d'une lunette des franges d'interférence, pourvu que la source de lumière fût limitée par une fente étroite. Bien qu'on ait par cette disposition l'avantage d'opérer avec la lumière transmise, les franges sont cependant trop étroites pour pouvoir être utilisées, ce qui provient de ce que les rayons interférents sortent par deux points différents, et pour cette raison se com-

portent toujours, même si leur distance mutuelle est rendue aussi petite qu'on veut, comme s'ils émanaient de deux fentes différentes, tandis qu'ils peuvent avec les miroirs de Jamin sortir par le même point d'une surface.

Fig. 1.

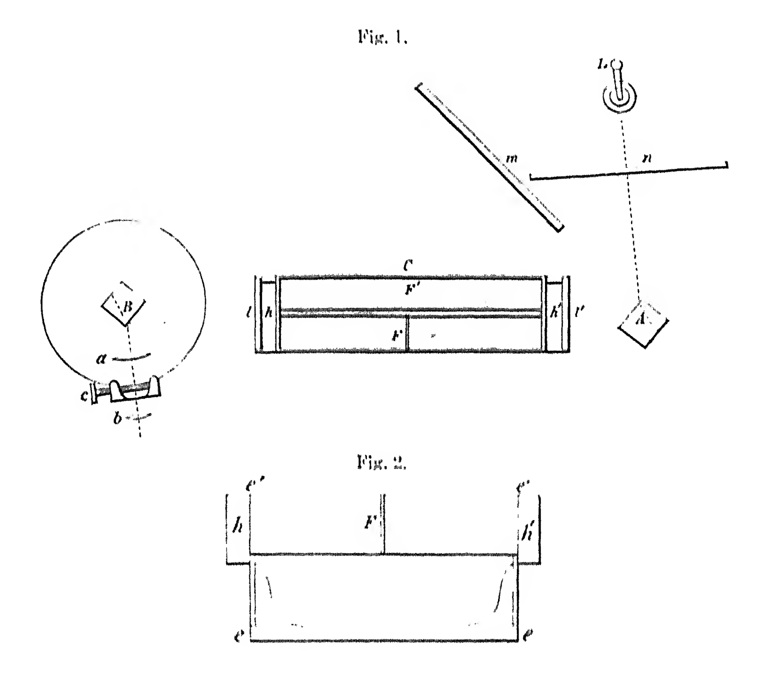


Fig. 2.

L'appareil C (fig. 1 et fig. 2) sert à recevoir l'eau qui doit être observée. Le pied (ee) était une plaque solide de métal, longue de 327^{mm}, large de 80^{mm}, à laquelle étaient reliées les deux extrémités (ee') qui étaient de la même largeur et fixées par de solides traverses de métal. Ces extrémités, hautes de 180^{mm}, supportaient deux vases ou auges F' et F'', ouvertes par le haut, à coupes transversales rectangulaires, qui mesuraient à l'intérieur 71^{mm} de haut et 32^{mm} de large. Ces auges étaient séparées par un intervalle de $5^{mm},5$; l'une (F') avait

été coupée en deux par le milieu et la coupure remplie d'un mastic mou, de manière qu'elle pouvait librement être dilatée ou contractée par échauffement ou refroidissement. Des ouvertures rectangulaires situées aux extrémités de chaque auge, hautes de 28mm et larges de 11mm, servaient au passage de la lumière. L'intervalle de deux ouvertures était large de 19mm,7. Elles étaient fermées à l'intérieur par des feuilles de mica (épaisses de 0mm,10), qui séparaient l'auge de deux petits réservoirs de bois vernissé. Ces réservoirs, qui occupaient toute la largeur de l'appareil, étaient fermés par des plaques de verre (*l* et *l'*) à glaces épaisses de 6mm qui n'étaient séparées des faces extrêmes de l'appareil que par un espace de 20mm. Les petits réservoirs étaient fixés aux extrémités de l'appareil. On avait auparavant examiné les plaques de verre en les intercalant entre les cubes, pendant qu'on observait les franges d'interférence, et elles s'étaient montrées d'un emploi excellent.

Tout l'appareil était préservé contre l'effet de la chaleur rayonnante de la flamme (*L*) par un écran *m*; on avait encore placé une grande et épaisse plaque de mica *n* entre la flamme et le cube *A*, afin de préserver celui-ci contre la chaleur rayonnante.

Les expériences furent en général exécutées de la manière suivante.

Les deux auges et les deux réservoirs furent remplis presque jusqu'au bord avec de l'eau distillée à la température de l'atmosphère, et le cube *B* fut installé de manière que les franges fussent parfaitement distinctes. Parfois aussi je me suis servi d'une flamme de gaz pour ajuster à peu près la frange centrale. Du reste il n'y avait pas de frange centrale blanche. L'eau dont je me

suis servi était distillée mais non purgée d'air par ébullition, vu qu'on ne pouvait pas préserver l'eau contre l'accès de l'air, et qu'une erreur considérable pouvait être la conséquence de l'absorption de l'air pendant la durée de l'expérience. Van der Willigen a fait la même remarque au sujet de ses expériences sur l'indice de réfraction de l'eau.

Après qu'on eut ajusté les cubes, une partie de l'eau de l'auge divisée (presque $\frac{1}{5}$) fut enlevée par un siphon et chauffée à environ 20°, puis elle fut de nouveau mélangée avec l'eau restante de l'auge. Il était nécessaire de faire ce mélange avec beaucoup de précaution, et en conséquence l'eau chauffée était amenée par le siphon au fond de l'auge, en même temps qu'on donnait au siphon un mouvement de va-et-vient en avant et en arrière. Ensuite l'eau des quatre réservoirs fut soigneusement agitée et la même opération pouvait être répétée une ou deux fois.

Si l'on ne prenait pas ces précautions pour échauffer l'eau ou si l'eau était trop chauffée, il en résultait que les franges devenaient bientôt indistinctes pendant la durée de l'expérience, qu'elles se déformaient et enfin s'évanouissaient tout à fait. Il était bien possible de faire reparaître ces franges en changeant la position des cubes, mais on reconnaît facilement que les résultats des mesures ne pouvaient dans ce cas être exacts, c'est pourquoi je n'ai tenu compte d'aucune des expériences où ce procédé a été nécessaire. Pour cette raison on ne peut s'éloigner que d'un nombre limité de degrés de la température de l'air; aussi les expériences ont-elles été faites en différentes saisons, du printemps jusqu'à la fin de l'année.

Si les franges étaient observées au moment où l'on venait d'agiter l'eau, elles restaient tout à fait immobiles pendant près d'une minute; puis elles commençaient à se déplacer avec une vitesse toujours croissante, pourtant vite parvenue à un maximum, où le temps du déplacement d'une frange pouvait s'amoindrir jusqu'à près de cinq secondes; puis la vitesse se mettait à décroître très régulièrement. On s'est servi du temps consécutif à l'agitation de l'eau, pendant lequel les franges restaient immobiles, pour observer des thermomètres, placés, au nombre de deux, un dans chaque auge. Puis on a compté les franges qui passaient devant le réticule, et on a continué jusqu'à ce que la durée du déplacement d'une frange fût au moins d'une minute. L'eau fut de nouveau agitée, pendant qu'on observait et comptait toujours les franges, et il va de soi qu'il était bien important que les franges ne s'évanouissent pas par l'agitation, ce qu'on ne pouvait obtenir que si l'on continuait à compter tout le temps qu'on a indiqué ci-dessus.

Ordinairement le nombre des franges fut augmenté de quelques unités quand on agitait l'eau chaude; en agitant l'eau des petits réservoirs il fut changé d'une petite fraction, et en agitant l'eau froide il fut un peu diminué. On observa de nouveau les thermomètres. Ils furent donc observés au commencement et à la fin des expériences, quand la température des réservoirs était devenue stationnaire et uniforme, ce qui était absolument nécessaire pour qu'on pût obtenir des résultats exacts.

On reconnaît facilement que le déplacement des franges est principalement dû au refroidissement de l'eau la plus chaude par le rayonnement et la conduction de la chaleur aux autres réservoirs plus froids et au milieu

ambiant. Au contraire l'eau froide, qui déjà avant la première observation des thermomètres était devenue un peu plus chaude que l'air ambiant, pouvait conserver à peu près la même température pendant toute la durée de l'experience.

On verra dans ce qui suit qu'on a obtenu une précision et une concordance mutuelle des expériences très satisfaisante. J'attribue ce bon résultat essentiellement à deux causes: la separation de l'eau chaude et des plaques de verre par les petits réservoirs extérieurs, et l'agitation de l'eau dans des auges ouvertes et assez grandes. En effet, si les colonnes d'eau inégalement chaudes etaient immédiatement fermées par les plaques de verre, les franges devenaient bientôt indistinctes par l'echauffement inegal des verres et finissaient par s'évanouir tout a fait. Les résultats étaient encore plus mauvais si chaque colonne d'eau etait fermee séparément par son verre plan; par consequent il etait necessaire d'ajouter les deux petits reservoirs, qui furent alors séparés des deux colonnes d'eau par des plaques très minces de mica.

J'ai obtenu de même des resultats peu satisfaisants dans quelques experiences ou l'eau que traversaient les rayons lumineux etait contenue dans deux tubes fermes et rectangulaires, qu'entourait l'eau des auges. Les tubes etaient coupes par le milieu et réunis par du caoutchouc. Deux thermometres dans chaque tube indiquaient la temperature de l'eau. Mais on reconnut qu'elle ne pouvait pas devenir uniforme. Il se formait des couches de temperature inégale, qui faisaient que les franges se deformaient et qu'on ne pouvait pas determiner la temperature avec précision. C'est pour

cette raison qu'on a obtenu des résultats différents au commencement et à la fin de chaque expérience.

On a dû remarquer qu'une seule des auges était divisée, tandis que l'autre était entière afin d'assurer la solidité le l'appareil. Pour rechercher si cette circonstance suffit en elle-même à fausser les résultats et à produire un déplacement des franges quand on chauffe uniformément les auges, on a placé une plaque de métal chaude dans l'espace compris entre les deux auges. Le résultat ne fut cependant pas un déplacement des franges; celles-ci devinrent seulement de plus en plus indistinctes à mesure que la chaleur gagnait les couches d'eau les plus proches.

Si l'intervalle entre les auges ne fut pas rempli par un corps mauvais conducteur, c'est que cela ne donna aucun bon résultat, probablement parce que la conduction de la chaleur était par là trop concentrée aux faces extrêmes.

Les nombres contenus dans le tableau ci-après sont les résultats de toutes les expériences faites de la mànière indiquée, à l'exception pourtant des deux dernières, où la différence de température est produite par refroidissement et non par échauffement. Les deux thermomètres dont on s'est servi ici avaient été tous deux fabriqués par Fastré, et leur échelle était divisée d'une manière arbitraire. Après avoir déterminé soigneusement le point de congélation et le point d'ébullition, on a trouvé les formules suivantes pour l'expression de la température t en degrés centigrades:

$$t = -18{,}985 + 2{,}6511\, T_1,$$
$$t = -2{,}763 + 2{,}0877\, T_2,$$

où T_1 et T_2 sont les degrés indiqués par les thermo-

mètres, dont le premier était placé dans l'auge F'', l'autre dans l'auge F. Dans les échelles des deux thermomètres chaque degré était divisé en 10 parties égales, et celles-ci étaient assez grandes pour qu'on pût avec une précision suffisante apprécier les dixièmes.

La première colonne du tableau ci-dessous contient les numéros d'ordre des expériences; la seconde et la quatrième les degrés observés au commencement et à la fin de chaque expérience; la troisième et la cinquième les degrés calculés en centigrades, et la dernière le nombre des franges déplacées de la flamme de sodium.

Nos	T_1	t_1	T_2	t_2	s
1	15,22	21,36	13,30	25,00	175,3
	15,30	21,58	11,75	21,77	
2	15,90	23,16	14,20	26,88	199
	15,90	23,16	12,44	23,21	
3	16,02	23,49	14,41	27,32	204
	16,17	23,88	12,81	23,98	
4	17,87	28,39	16,01	30,66	107
	17,86	28,36	15,13	28,82	
5	18,78	30,80	17,91	34,63	234
	18,68	30,54	16,07	30,79	
6	18,77	30,78	17,69	34,17	209
	18,66	30,49	16,00	30,64	
7	13,00	15,48	11,16	20,54	189
	13,00	15,48	9,10	16,24	
8	12,20	13,36	10,60	19,37	221
	12,47	14,07	8,30	14,56	
9	11,76	12,19	10,00	18,11	215,5
	12,18	13,30	7,84	13,60	
10	10,11	7,82	8,46	14,90	198
	10,62	9,17	6,00	9,76	
11	9,20	5,40	6,21	10,20	89,6
	9,70	6,73	4,86	7,38	
12	9,40	5,94	6,22	10,22	76
	9,80	7,00	5,11	7,90	
13	9,31	5,70	2,60	2,67	21
	9,27	5,59	3,49	4,52	
14	8,78	4,29	2,02	1,45	11,5
	8,75	4,21	2,80	3,08	

cette raison qu'on a obtenu des résultats différents au commencement et à la fin de chaque expérience.

On a dû remarquer qu'une seule des auges était divisée, tandis que l'autre était entière afin d'assurer la solidité le l'appareil. Pour rechercher si cette circonstance suffit en elle-même à fausser les résultats et à produire un déplacement des franges quand on chauffe uniformément les auges, on a placé une plaque de métal chaude dans l'espace compris entre les deux auges. Le résultat ne fut cependant pas un déplacement des franges; celles-ci devinrent seulement de plus en plus indistinctes à mesure que la chaleur gagnait les couches d'eau les plus proches.

Si l'intervalle entre les auges ne fut pas rempli par un corps mauvais conducteur, c'est que cela ne donna aucun bon résultat, probablement parce que la conduction de la chaleur était par là trop concentrée aux faces extrêmes.

Les nombres contenus dans le tableau ci-après sont les résultats de toutes les expériences faites de la manière indiquée, à l'exception pourtant des deux dernières, où la différence de température est produite par refroidissement et non par échauffement. Les deux thermomètres dont on s'est servi ici avaient été tous deux fabriqués par Fastré, et leur échelle était divisée d'une manière arbitraire. Après avoir déterminé soigneusement le point de congélation et le point d'ébullition, on a trouvé les formules suivantes pour l'expression de la température t en degrés centigrades:

$$t = -18{,}985 + 2{,}6511\, T_1,$$
$$t = -2{,}763 + 2{,}0877\, T_2,$$

où T_1 et T_2 sont les degrés indiqués par les thermo-

mètres, dont le premier était placé dans l'auge F', l'autre dans l'auge F. Dans les échelles des deux thermomètres chaque degré était divisé en 10 parties égales, et celles-ci étaient assez grandes pour qu'on pût avec une précision suffisante apprécier les dixièmes.

La première colonne du tableau ci-dessous contient les numéros d'ordre des expériences; la seconde et la quatrième les degrés observés au commencement et à la fin de chaque expérience; la troisième et la cinquième les degrés calculés en centigrades, et la dernière le nombre des franges déplacées de la flamme de sodium.

Nos	T_1	t_1	T_2	t_2	s
1	15,22 15,30	21,36 21,58	13,30 11,75	25,00 21,77	175,3
2	15,90 15,90	23,16 23,16	14,20 12,44	26,88 23,21	199
3	16,02 16,17	23,49 23,88	14,41 12,81	27,32 23,98	204
4	17,87 17,86	28,39 28,36	16,01 15,13	30,66 28,82	107
5	18,78 18,68	30,80 30,54	17,91 16,07	34,63 30,79	234
6	18,77 18,66	30,78 30,49	17,69 16,00	34,17 30,64	209
7	13,00 13,00	15,48 15,48	11,16 9,10	20,54 16,24	189
8	12,20 12,47	13,36 14,07	10,60 8,30	19,37 14,56	221
9	11,76 12,18	12,19 13,30	10,00 7,84	18,11 13,60	215,5
10	10,11 10,62	7,82 9,17	8,46 6,00	14,90 9,76	198
11	9,20 9,70	5,40 6,73	6,21 4,86	10,20 7,38	89,6
12	9,40 9,80	5,94 7,00	6,22 5,11	10,22 7,90	76
13	9,31 9,27	5,70 5,59	2,60 3,49	2,67 4,52	21
14	8,78 8,75	4,29 4,21	2,02 2,80	1,45 3,08	11,5

Dans les expériences qui suivent on s'est servi d'un thermomètre de Geisler, qui était divisé en dixièmes de degré *C*. Il marquait 0,40 degré au point de congélation, et fut par conséquent corrigé par soustraction de 0,40 degré. Ces expériences, les trois premières exceptées, furent faites d'une autre manière, qui pour les températures peu élevées donna un résultat plus exact. Si la température de l'eau dans l'auge *F* était amenée presque à 0°, et si l'eau de l'autre auge avait une température d'environ 4° C., ce qui était nécessaire parce que cette température était à peu près celle de l'air ambiant, les petites variations inévitables de la dernière colonne d'eau devaient trop influer sur les résultats pour qu'il fût possible de déterminer avec précision le petit déplacement dû à l'échauffement de la colonne d'eau la plus froide. Pour cette raison je n'ai conservé que trois expériences faites de la première manière (les trois premières du tableau ci-dessous), dans lesquelles l'eau de l'auge *F'* avait accidentellement gardé la même température au commencement et à la fin des expériences. Les autres expériences ont été faites de la manière suivante.

L'auge *F* fut remplie d'eau presque à 0°, l'eau des autres réservoirs étant à une température un peu plus basse que celle de l'air. Après avoir suffisamment agité l'eau de *F*, on a observé le thermomètre qui y était plongé; puis on a mélangé comme à l'ordinaire une petite quantité d'eau à 2° ou à 4° avec l'eau de cette auge, en observant toujours les franges. Après avoir obtenu un déplacement d'une ou de plusieurs franges, on a cessé de mettre de l'eau dans cette auge. Puis on n'a plus fait qu'agiter l'eau dans cette auge et dans les petits réservoirs, et on a lu les indications des thermo-

mètres. La durée d'une telle expérience était si courte, que l'eau dans l'autre auge ne pouvait par la variation de sa température produire aucun déplacement de frange d'après des expériences faites antérieurement, si elle restait en repos après la première agitation. Cette manière de faire les expériences a donné des résultats satisfaisants et elle était d'une application facile. Mais il va sans dire qu'on ne pouvait pas appliquer la même méthode pour des températures plus élevées, où la plus petite inégalité dans la distribution de la chaleur eût influé beaucoup sur les franges et amené bientôt leur disparition.

Le tableau ci-dessous contient dans la colonne t les températures de l'eau de l'auge E'' au commencement des expériences, dans la colonne t' les températures à la fin des experiences, et dans la colonne s le nombre des franges déplacées de la flamme de sodium.

Nos	t	t'	s
15	1,77	2,57	5
16	0,95	2,10	5
17	1,80	2,60	5
18	0,50	1,31	2,2
19	0,32	1,43	3
20	1,19	1,45	1
21	0,32	0,80	1
	0,20	0,90	1
	0,45	0,95	1
	0,25	0,89	1
	0,25	0,80	1
	0,39	0,96	1

Les six derniers résultats indiqués sous le nº 21 donnent comme moyenne un déplacement d'une frange

pour un échauffement de 0°,310 à 0°,883 C., et on s'est servi dans les calculs de cette moyenne au lieu des valeurs observées directement.

Le calcul des expériences a été fait de la manière suivante. Soit $s(t)$ le nombre des franges déplacées par un échauffement de 0° à t° C. de la colonne d'eau dans l'auge F, et soit par conséquent $\frac{ds(t)}{dt}$ le rapport du nombre des franges déplacées à l'accroissement du temps dt: alors on peut écrire

$$\frac{ds(t)}{dt} = a + bt + ct^2 + \ldots, \tag{3}$$

$$s(t) = at + \tfrac{1}{2}bt^2 + \tfrac{1}{3}ct^3 + \ldots \tag{4}$$

Si la colonne F en question est chauffée de t_1 à t'_1 degrés, et si l'autre colonne F'', qui est de la même grandeur, est chauffée de t_2 à t'_2 degrés, le nombre des franges déplacées sera déterminé par la relation

$$s = s(t'_1) - s(t_1) - s(t'_2) + s(t_2). \tag{5}$$

On doit à présent pour chaque expérience chercher la température t qui satisfait à l'équation

$$\frac{ds(t)}{dt} = \frac{s}{\varDelta}, \tag{6}$$

où $\varDelta$ est la différence d'accroissement de température dans les deux auges:

$$\varDelta = t'_1 - t_1 - t'_2 + t_2. \tag{7}$$

Si les deux séries ci-dessus (3) et (4) se réduisaient à leurs deux premiers termes, on obtiendrait en vertu de (5)

$$s = a\varDelta + \tfrac{1}{2}b\,(t'^2_1 - t^2_1 - t'^2_2 + t^2_2),$$

et si dans cette hypothèse l'on remplace t par τ dans les équations (6) et (3), on obtiendra

$$s = a\Delta + b\tau\Delta.$$

Des deux dernières équations on peut déduire

$$\tau = \frac{t_1'^2 - t_1^2 - t_2'^2 + t_2^2}{2\Delta}. \tag{8}$$

C'est par cette formule qu'on a calculé τ pour chaque expérience; puis les constantes a, b, c ont été calculées par la méthode des moindres carrés. On a trouvé

$$\frac{c}{b} = 0{,}011,$$

résultat qui était suffisamment exact pour le calcul de t. En effet, si l'on tient aussi compte du troisième terme des séries (3) et (4), on aura en vertu des équations (4), (5), (7), (8),

$$s = a\Delta + b\tau\Delta + \tfrac{1}{3}c(t_1'^3 - t_1^3 - t_2'^3 + t_2^3),$$

ce qui donne à cause des équations (3) et (6)

$$a + bt + ct^2 = a + b\tau + \frac{c}{3\Delta}(t_1'^3 - t_1^3 - t_2'^3 + t_2^3),$$

d'où l'on tire facilement la petite correction $t - \tau$, qui dans les expériences n'excède pas quelques centièmes de degré C.

Après avoir introduit cette correction, on a calculé exactement les trois coefficients par la méthode des moindres carrés, de manière que la somme des carrés des écarts de $\frac{s}{\Delta}$ fût un minimum. La formule trouvée est

$$\frac{ds_{x_a}}{dt} = 0{,}011 + 3{,}0190t - 0{,}03148t^2, \tag{a}$$

où s_{x_a} remplace $s(t)$.

Cette formule n'est valable que de $t = 0°$ à $t = 30°$.

Par des calculs provisoires, on a en effet trouvé que les deux expériences, dans lesquelles t est plus grand que 30° ont donné des résultats trop forts, ce qui indiquait que la formule admise contenant trois constantes ne peut être appliquée sans nuire à la précision si t excède 30°. En conséquence on n'a pas tenu compte de ces deux expériences dans les calculs définitifs, et pour $t > 30°$ on doit supposer que le déplacement des franges a une plus grande valeur que celle que donne la formule.

Dans le tableau ci-dessous sont indiquées les valeurs de Δ, τ, t, s et $\frac{s}{\Delta}$ déduites des expériences et aussi, pour ce dernier rapport, les valeurs calculées par la formule (a).

Nos	Δ	τ	t	s	$\frac{s}{\Delta}$ obs.	$\frac{s}{\Delta}$ calc.	Diff.
5	3,58	32,87	32,83	234	65,42		
6	3,24	32,58	32,55	209	64,57		
4	1,81	29,76	29,75	107	59,12	59,26	0,14
3	3,74	25,42	25,40	204	54,58	54,40	+ 0,18
2	3,67	25,05	25,03	199	54,16	53,92	+ 0,24
1	3,47*	23,26	23,24	175,3	50,84	51,50	0,66
7	4,30	18,39	18,37	189	43,94	43,78	+ 0,16
8	5,52	16,52	16,48	221	40,05	40,35	0,30
9	5,62	15,23	15,19	215,5	38,33	37,86	+ 0,47
10	6,49	11,53	11,48	198	30,52	30,07	+ 0,45
12	3,38	8,25	8,24	76	22,49	22,49	0
11	4,14	7,91	7,89	89,6	21,62	21,61	+ 0,01
13	1,96	3,71	3,71	21	10,69	10,69	0
14	1,71	2,35	2,35	11,5	6,73	6,86	0,13
17	0,80	2,20	2,20	5	6,25	6,43	0,18
15	0,80	2,17	2,17	5	6,25	6,35	0,10
16	1,15	1,52	1,52	5	4,35	4,47	0,12
20	0,26	1,32	1,32	1	3,87	3,88	0,01
18	0,81	0,90	0,90	2,2	2,72	2,65	+ 0,07
19	1,11	0,87	0,87	3	2,70	2,56	+ 0,14
21	0,573	0,596	0,596	1	1,745	1,746	0

* NOTE 2.

On a calculé Δ avec trois décimales, d'où provient une inexactitude apparente des derniers chiffres dans certaines valeurs de $\frac{s}{\Delta}$.

Les nombres cités sous le nº 21 étant la moyenne de six observations, on leur a attribué dans les calculs un poids égal à 6.

On verra que le nombre, trouvé par l'expérience, des franges déplacées par une élévation de 1° C. ne diffère que dans un seul cas de $\frac{?}{3}$ de frange du nombre calculé, et que dans tous les autres cas la différence est moindre que $\frac{1}{2}$. L'erreur probable est 0,17, résultat qui doit être regardé comme tout à fait satisfaisant.

Dans ces expériences on s'est souvent servi de la flamme complexe de sodium et de lithium pour pouvoir en même temps compter le nombre des franges rouges. De plus on a fait plusieurs expériences spéciales sur ces dernières. En comptant les franges, on s'est servi comme point de départ d'une frange centrale rouge située entre deux jaunes ou d'une frange jaune située entre deux rouges, parce qu'on pouvait observer ces franges plus distinctement que la coïncidence d'une frange rouge avec une frange jaune. J'ai compté le nombre des franges rouges et jaunes déplacées jusqu'à ce qu'on soit parvenu à une frange située tout à fait de la même manière que celle qui a servi de point de départ.

Le rapport du nombre des franges rouges déplacées à celui des franges jaunes était toujours le même si la température excédait 25° C. On a trouvé par exemple 91 franges rouges et 105 franges jaunes pour une température moyenne de 26°,34 C., 78 franges rouges et 90 franges jaunes pour 32°,5 C., etc.

Au lieu de toutes ces expériences, il ne s'en trouv
qu'une seule dans le tableau ci-dessous, où la tempéra
ture 29°,3 C. est une moyenne entre les température
des différentes expériences, qui avaient donné le mêm
rapport (13 : 15) pour les franges rouges et les jaunes.

A des températures plus basses cette relation
changé tout à fait, et avant tout il était intéressant d
voir comment la frange rouge centrale pouvait par l
déplacement d'une seule frange jaune se déplacer d
plusieurs franges dans la même direction que les frange
jaunes aux températures les plus basses, car on ava
pour ainsi dire immédiatement sous les yeux la dispersio
remarquable de l'eau à des températures peu élevée
Dans les expériences citées sous le n° 21, la frange cen
trale rouge, qui était ajustée au centre du réticule, fu
ainsi déplacée de trois franges par le déplacement d'un
frange jaune. Pour bien reconnaître la signification d
cette observation, on doit remarquer que la distance d
deux franges rouges était à peu près les $\frac{7}{8}$ de celle d
* NOTE 3. deux franges jaunes.* Si par exemple les franges rouge
étaient immobiles tandis que les franges jaunes se dépla
çaient, on verrait la frange rouge centrale se déplace
rapidement dans la même direction, et après le déplace
ment d'une frange jaune on verrait sa première plac
occupée par la frange rouge centrale suivante. Si, comm
dans les expériences citées, la frange rouge s'était dé
placée de trois franges pendant le déplacement d'un
frange jaune, le déplacement des franges rouges éta
$1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$ pour celui d'une seule frange jaune.

De cette manière on pouvait déterminer le rappor
du nombre des franges déplacées avec une grande préci
sion aussi bien dans ces expériences que dans d'autre

où le nombre total des franges déplacées était très petit.

Le tableau ci-dessous contient les résultats des expériences. La colonne t donne la moyenne des deux températures au commencement et à la fin du dénombrement; mais quand on ne pouvait pas, ce qui arrivait en général, trouver ces deux températures, parce qu'elles n'étaient pas identiques à celles qu'on avait observées au commencement et à la fin de l'expérience, ces températures moyennes étaient obtenues par un calcul qui est, je crois, trop élémentaire pour être rapporté ici. La colonne suivante contient le rapport trouvé des nombres de franges rouges et jaunes déplacées; de ce rapport et de la valeur calculée par la formule (a) qui donne $\frac{ds_{Na}}{dt}$ on a déduit la valeur correspondante $\frac{ds_{Li}}{dt}$ pour les franges rouges. Par la méthode des moindres carrés on a trouvé la formule

$$\frac{ds_{Li}}{dt} = -0{,}450 + 2{,}6410\,t - 0{,}03027\,t^2, \qquad (b)$$

par laquelle on a calculé les valeurs qui se trouvent dans la colonne $\frac{ds_{Li}}{dt}$ (b).

t	rouge / jaune	$\frac{ds_{Na}}{dt}$	$\frac{ds_{Li}}{dt}$	$\frac{ds_{Li}}{dt}$ (b)	Diff.
29,3	13 : 15	58,81	50,97	50,94	+ 0,03
23,0	27 : 32*	51,16	44,24	44,28	— 0,04
15,3	100½ : 116½	38,08	32,85	32,87	— 0,02
13,3	124½ : 144½	34,12	29,40	29,32	+ 0,08
9,0	59 : 69	24,34	20,81	20,87	— 0,06
8,0	58 : 68	21,90	18,68	18,74	— 0,06
4,6	10½ : 12½	13,12	11,02	11,06	— 0,04
3,2	10 : 12	9,27	7,72	7,69	+ 0,03
2,1	9 : 11	6,15	5,03	4,96	+ 0,07
1,73	4 : 5	5,08	4,06	4,03	+ 0,03
1,60	3¾ : 4¾	4,72	3,73	3,70	+ 0,03
1,21	3 : 4	3,56	2,67	2,70	— 0,03
0,88	2½ : 3½	2,59	1,85	1,85	0
0,60	⅚ : 1	1,75	1,09	1,11	— 0,02

* NOTE 4.

Les calculs ont été faits en calculant encore une décimale de plus que celles qui sont relatées ici. On verra que les écarts par rapport aux valeurs calculées par la formule (*b*) n'excèdent pas 0,08.

Des deux formules trouvées de cette manière il faut déduire les variations dn_{Na} et dn_{Li} des indices de la flamme du sodium et de celle du lithium pour un accroissement dt de la température. Si l'on désigne par L la longueur commune des deux colonnes d'eau et par λ_{Na} et λ_{Li} les longueurs d'onde de la flamme du sodium et de celle du lithium, on aura

$$L \frac{dn_{Na}}{dt} = \frac{ds_{Na}}{dt} \lambda_{Na},$$

* NOTE 5.

$$L \frac{dn_{Li}}{dt} = \frac{ds_{Li}}{dt} \lambda_{Li}.^*$$

La longueur L de la colonne d'eau était la distance des deux feuilles de mica qui les limitaient, pendant que l'eau des deux petits réservoirs, qu'on agitait au commencement et à la fin des expériences, ne contribuait pas au déplacement des franges. On a trouvé

$$L = 317^{mm},6.$$

Comme base pour la détermination des longueurs d'onde, on s'est servi des mesures d'Ångström (Pogg. Ann., t. 123), qui donnent pour les raies D en mètres

$$\lambda_{Na} = 10^{-6}.589^{mm},75.$$

De plus on a d'après Ketteler (Beobachtungen über die Farbenzerstreuung)

$$\frac{\lambda_{Li}}{\lambda_{Na}} = 1,138958,$$

nombre qui ne diffère que très peu des nombres trouvés par Fizeau (Pogg. Ann., t. 119) et par Rühlmann (Pogg. Ann., t. 132), et qui sont 1,13846 et 1,13927. Ces nombres étant valables pour les longueurs d'onde dans l'air, les nombres trouvés pour les indices de réfraction de l'eau seront valables pour l'indice de réfraction de l'air par rapport à l'eau.

On trouvera à présent en vertu des formules (*a*) et (*b*)

$$\frac{dn_{Na}}{dt} = 10^{-6}[0{,}076 - 5{,}606\,t + 0{,}06403\,t^2], \qquad (A)$$

$$\frac{dn_{Li}}{dt} = 10^{-6}[0{,}952 - 5{,}586\,t + 0{,}06402\,t^2]. \qquad (B)$$

L'erreur probable est ici de trois unités du septième ordre décimal, degré de précision qui est 50 fois plus grand que celui qu'on peut obtenir pour les mêmes quantités à l'aide du prisme.

On reconnaîtra au moyen de ces équations que l'indice de réfraction de la raie du sodium a un maximum pour 0°,014 C., tandis que celui de la raie du lithium est considérablement plus grand, à savoir 0°,171 C.

On trouve par intégration, la température correspondante à l'indice de réfraction étant ajoutée entre parenthèses à la suite du symbole de l'indice,

$$n_{Na}(t) = n_{Na}(0) + 10^{-6}[0{,}076\,t - 2{,}803\,t^2 + 0{,}02134\,t^3], \quad (A')$$

$$n_{Li}(t) = n_{Li}(0) + 10^{-6}[0{,}952\,t - 2{,}793\,t^2 + 0{,}02134\,t^3]. \quad (B')$$

Comparons ces résultats avec ceux qui ont été trouvés par d'autres observateurs. Parmi les observations les plus complètes des indices de réfraction de l'eau sont celles de Rühlmann (Pogg. Ann., t. 132), qui a trouvé

$$n_{Na}(T) = 1{,}33374 + 10^{-6}[-3{,}147\,T^2 + 0{,}0001205\,T^4],$$
$$n_{Li}(T) = 1{,}33154 + 10^{-6}[-3{,}072\,T^2 + 0{,}0001123\,T^4],$$

où T est la température en degrés Réaumur. Ces formules sont valables de $T = 0$ à $T = 80°$ R. Si l'on cherche par exemple la différence des indices de refraction de la raie du sodium à 20° C. et à 30° C., on trouvera

$$n_{Na}(20°) - n_{Na}(30°) = 0{,}00097.$$

Des expériences de Jamin (Comptes rendus, t. 43), qui a donné la formule suivante valable pour la lumière blanche

$$n(t) = n(0) - 10^{-6}[12{,}573\,t + 1{,}929\,t^2],$$

on peut conclure

$$n(20°) - n(30°) = 0{,}001091.$$

Par les observations de Wüllner (Pogg. Ann., t. 133) on obtiendra

$$n(20°) - n(30°) = 0{,}00099,$$

et par celles de Landolt (Pogg. Ann., t. 117)

$$n_{Na}(20) - n_{Na}(30) = 0{,}00105,$$

tandis que les présentes observations donnent en vertu de la formule (A') pour cette quantité la valeur

$$0{,}0009973.$$

La concordance est moindre si l'on compare nos formules avec celles de Rühlmann à des températures plus basses; mais si nous revenons aux expériences dont ces dernières formules ont été déduites, nous parviendrons à ce résultat remarquable, que les formules trouvées ici concordent mieux avec les expériences de Rühl-

mann que les formules que lui-même en a déduites, et que cela a encore lieu surtout pour les températures les plus élevées (jusqu'à 30°), pour lesquelles les erreurs des présentes expériences doivent s'accumuler et par conséquent apparaîtront le plus. La concordance moins complète des formules de Rühlmann et de ses expériences provient de ce qu'il suppose la même formule valable de 0° à 80° R., au lieu de calculer par exemple deux formules, l'une valable de 0° R. à 24° R., l'autre de 24° R. à 80' R., comme on a trouvé qu'il était nécessaire de le faire pour la dilatation de l'eau à des températures allant du point de congélation au point d'ébullition.

Le tableau ci-dessous contient les résultats des expériences de Rühlmann sur l'indice de réfraction de la lumière jaune pour des températures plus basses que 24° R. On a ajouté les valeurs calculées par Rühlmann lui-même et par la formule (A'), l'indice de réfraction à 0° étant supposé égal à 1,33378.

T	Obs. (R)	Calc. (R)	Diff.	Calc. (A')	Diff.
0	1,33375	1,33374	+ 0,1	1,33378	— 0,3
0	1,33380	1,33374	+ 0.6	1,33378	+ 0,2
1,2	1,33375	1,33374	+ 0,1	1,33377	— 0,2
3,2	1,33372	1,33371	+ 0,1	1,33374	— 0,2
4,0	1,33371	1,33369	+ 0,2	1,33371	0,0
4,6	1,33368	1,33368	0,0	1,33369	— 0,1
7,9	1,33355	1,33355	0,0	1,33353	+ 0,2
8,0	1,33353	1,33355	— 0,2	1,33352	+ 0,1
8,2	1,33350	1,33354	— 0,4	1,33351	— 0,1
10,2	1,33340	1,33343	— 0,3	1,33337	+ 0,3
11,8	1,3333	1,3333	0	1,33324	+ 1
18,4	1,3328	1,3327	+ 1	1,3326	+ 2
18,8	1,3325	1,3326	— 1	1,3325	0
19,6	1,3324	1,3325	— 1	1,3324	0
20,9	1,3323	1,3324	— 1	1,33225	+ 0,5
23,7	1,3319	1,3319	0	1,3319	0

D'une manière analogue on trouve pour la lumière rouge le tableau suivant

T	Obs. (R)	Calc. (R)	Diff.	Calc. (B')	Diff.
0	1,33155	1,33154	+ 0,1	1,33156	— 0,1
1,0	1,33150	1,33153	— 0,3	1,33156	— 0,6
3,0	1,33152	1,33152	0,0	1,33153	— 0,1
3,8	1,33151	1,33149	+ 0,2	1,33150	+ 0,1
4,3	1,33150	1,33148	+ 0,2	1,33149	+ 0,1
7,9	1,33132	1,33134	— 0,2	1,33132	0,0
8,1	1,33131	1,33133	— 0,2	1,33131	0,0
10,1	1,33125	1,33123	+ 0,2	1,33117	+ 0,8
12,3	1,3311	1,3311	0	1,3310	+ 1
17,2	1,3304	1,33065	— 2,5	1,3305	— 1
18,1	1,3304	1,3305	— 1	1,3304	0
22,4	1,3299	1,3300	— 1	1,3299	0

Nous allons des résultats obtenus chercher à déduire des formules pour l'indice de réfraction réduit de l'eau, indice que nous supposerons développé en série suivant les puissances de t, savoir

$$A(t) = A(0) + 10^{-6}(\alpha t + \beta t^2 + \gamma t^3).$$

Le coefficient de t^3 étant le même pour $n_{Na}(t)$ et $n_{Li}(t)$ dans les formules (A') et (B'), il sera encore le même ici et l'on aura par conséquent

$$\gamma = 0{,}02134.$$

De plus les coefficients de t^2 diffèrent si peu dans les deux formules, qu'il doit suffire de déduire la valeur de β de la formule de dispersion à deux constantes seulement, c'est-à-dire de l'équation

$$n_{Na}(t) = A(t) + \frac{B(t)}{\lambda^2_{Na}}$$

et de

$$n_{Li}(t) = A(t) + \frac{B(t)}{\lambda^2_{Li}}.$$

D'où l'on tirera par élimination de $B(t)$, en se servant de la valeur des deux longueurs d'onde dont nous nous sommes déjà servi précédemment,

$$A(t) = n_{Li}(t) - 3{,}3646\,(n_{Na}(t) - n_{Li}(t)). \qquad (9)$$

A l'aide de cette équation on trouve, en comparant les coefficients de t^2,

$$\beta = -2{,}759.$$

Au contraire on ne peut pas employer cette équation, qui ne suppose que deux coefficients dans la formule de dispersion, pour déduire la valeur du coefficient de t, puisque les coefficients de t sont très différents dans les formules (A') et (B'). Ce coefficient reste donc encore indéterminé, et l'on peut écrire

$$A(t) = A(0) + 10^{-6}[\alpha t - 2{,}759\,t^2 + 0{,}02134\,t^3], \qquad (C')$$

d'où l'on tirera, en différentiant par rapport à t,

$$\frac{dA(t)}{dt} = 10^{-6}[\alpha - 5{,}518\,t + 0{,}06402\,t^2]. \qquad (C)$$

Mathiessen a donné la formule suivante (Pogg. Ann., t. 128) pour le volume de l'eau entre 4° et 32° C.

$$v = 1 - 0{,}0000025300\,(t-4) + 0{,}0000083890\,(t-4)^2 - 0{,}00000007173\,(t-4)^3,$$

d'où l'on déduira par différentiation

$$\frac{dv}{dt} = -10^{-6}[73{,}085 - 18{,}4996\,t + 0{,}21519\,t^2],$$

ce qui peut s'écrire sous la forme

$$\frac{dv}{dt} = -10^{-6}\cdot 3{,}3613\,[21{,}743 - 5{,}504\,t + 0{,}06402\,t^2],$$

où t^2 a maintenant le même coefficient que celui qui figure dans la formule (C) ci-dessus.

En faisant la comparaison des deux expressions de $\frac{dA(t)}{dt}$ et de $\frac{dv}{dt}$, on trouvera une concordance presque complète des coefficients de t dans la parenthèse, l'un
* NOTE 6. ayant une valeur qui ne diffère de l'autre que d'environ $\frac{1}{400}$ *, écart tellement petit, qu'il devient insignifiant de savoir si l'on doit supposer que cet écart provient d'une détermination incomplète de la dispersion ou d'une erreur d'observation.

Reste la question de savoir si l'on doit admettre que α aussi est égal à 21,743, ou, ce qui revient au même, si l'indice de réfraction réduit présente, de même que le poids spécifique de l'eau, un maximum à 4° C. On a remarqué qu'en vertu des formules (A) et (B) les maximums des indices de réfraction de la raie du sodium et de celle du lithium ont lieu à une température de 0°,014 C. et 0°,171 C., différence très considérable pour deux raies du spectre situées à si peu de distance, et qui doit aussi apparaître immédiatement d'une manière frappante et caractéristique dans les expériences.

Mais le maximum de l'indice de réfraction ayant lieu pour la longueur d'onde $\lambda_{Na} = 10^{-6} \cdot 589^{mm},75$ à 0°,014 C. et pour $\lambda_{Li} = 10^{-6} \cdot 671^{mm},70$ à 0°,171 C., il ne paraît pas invraisemblable qu'il soit situé à 4° C. pour une longueur d'onde infiniment grande; ou inversement, si l'on connaissait ce dernier maximum et si de plus le maximum de l'indice de réfraction de λ_{Na} était situé près de 0°, on ne pourrait pas s'attendre qu'il eût lieu pour λ_{Li} à une température supérieure à celle que nous avons trouvée dans les présentes expériences.

Mais si nous revenons à l'équation (2) du commencement de ce mémoire:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\delta A}{\delta v}\frac{dv}{dt} + \frac{\delta A}{\delta t},$$

et si y nous introduisons les valeurs de $\frac{dA}{dt}$ et $\frac{dv}{dt}$ données par les équations (C) et (10), on verra qu'elle sera satisfaite pour les petites variations du volume de l'eau entre 0° et 30° C. par

$$\frac{\delta A}{\delta v} = -\frac{1}{3,3613} = -0,2976 \qquad (11)$$

et

$$\frac{\delta A}{\delta t} = 10^{-6}(\alpha - 21,743).$$

La dernière expression s'évanouit vraisemblablement d'après ce qui précède, et on aura alors comme résultat des présentes expériences une détermination exacte de la relation qui lie la variation de l'indice de réfraction réduit de l'eau entre 0° et 30° C. à la dilatation correspondante et en même temps une certaine probabilité que cet indice est fonction du volume seul.

Nous chercherons maintenant, au moyen d'autres expériences sur l'indice de réfraction de l'eau, à déterminer l'indice de réfraction réduit à 0°; il faut alors commencer par un examen plus approfondi de la dispersion.

On se fait rapidement une idée de la dispersion d'un corps par une construction graphique, ce qui est aussi un moyen excellent pour se procurer une assez bonne détermination de l'indice de réfraction. Sur un tableau divisé en un grand nombre de petits carrés on porte comme abscisses les inverses des carrés des longueurs d'onde mesurées avec une unité arbitraire, et comme ordonnées les indices de réfraction correspondants diminués d'une constante

arbitraire. J'appellerai courbe de dispersion une courbe construite de cette manière.

En ce qui concerne l'eau, j'ai trouvé, comme je le démontrerai plus loin par des nombres, que cette courbe est toujours convexe, c'est-à-dire que pour tous les points connus la convexité est tournée vers la direction positive de l'axe des ordonnées, et que cela a lieu pour toutes les expériences faites jusqu'ici aux températures ordinaires. Cette convexité diminue avec la température. D'après Rühlmann, la courbe devient rectiligne à 80° C. et se transforme ensuite en une courbe concave.

Ceci n'est pas une singularité particulière à l'eau; c'est ce qui ressort des nombres assez exacts de Wüllner représentant l'indice de réfraction de différents corps (Pogg. Ann., t. 133). Cet indice est déterminé pour les trois raies du spectre de l'hydrogène (H_α, H_β, H_γ) et la courbe est, dans les calculs de Wüllner, considérée comme rectiligne, parce que celui-ci n'a appliqué dans ses calculs qu'une formule de dispersion à deux constantes.

Ainsi Wüllner trouve pour la glycérine:

	Obs.	Calc.	Diff.
n_α =	1,453177	1,453210	−33
n_β =	1,460868	1,460804	+64
n_γ =	1,465064	1,465097	−33.

On voit que la valeur observée de l'indice de réfraction est plus petite que la valeur calculée pour la plus petite et la plus grande longueur d'onde, et plus grande pour l'onde intermédiaire; d'où l'on peut conclure que la courbe de dispersion est aussi convexe pour la glycérine. C'est de la même manière que se comportent tous les mélanges de glycérine et d'eau, le mélange d'un

volume d'alcool et de deux volumes de glycérine, ainsi que les différentes dissolutions aqueuses de chlorure de zinc.

Ces exemples suffisent pour prouver incontestablement que la courbe de dispersion peut être convexe. J'attache de l'importance à ce fait, parce qu'il est en opposition directe avec la formule de Christoffel (Pogg. Ann., t. 117), dont toutes les recherches postérieures n'ont pas manqué de tenir compte et à laquelle elles ont attaché une importance qu'elle aurait en effet si elle était d'accord avec l'expérience. Christoffel a, comme on sait, déduit de la formule de dispersion de Cauchy la formule suivante

$$n = \frac{n_0 \sqrt{2}}{\sqrt{1+\frac{\lambda_0}{\lambda}} + \sqrt{1-\frac{\lambda_0}{\lambda}}}.$$

Dans cette expression n'entrent que deux constantes positives n_0 et λ_0, et par conséquent il serait possible, en vertu de cette formule, de déterminer la dispersion seulement par deux observations de deux longueurs d'onde différentes. Mais cette formule est en effet incompatible avec une courbe convexe de dispersion. Si l'on pose

$$\frac{\lambda_0^2}{\lambda^2} = x, \quad n = y,$$

x et y seront les coordonnées de la courbe de dispersion, et l'on aura

$$y = \frac{n_0}{\sqrt{1+\sqrt{1-x}}},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{n_0}{4\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{(1+\sqrt{1-x})^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{n_0}{8} \frac{1}{(1-x)(1+\sqrt{1-x})^{\frac{3}{2}}} \left[\frac{1}{\sqrt{1-x}} + \frac{3}{2(1+\sqrt{1-x})}\right].$$

Comme x ne peut pas surpasser 1, $\frac{d^2y}{dx^2}$ sera positif pour toutes les valeurs positives de x, et par conséquent la courbe de dispersion sera toujours concave.

Comme base de nos calculs nous nous servirons de la formule de Cauchy

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4} + \frac{D}{\lambda^6} + \ldots,$$

et nous faciliterons beaucoup ces calculs en déterminant d'avance A en fonction linéaire des indices de réfraction correspondants aux différentes raies du spectre dont nous nous servirons. Désignons par λ_1, λ_2, ... λ_m les différentes longueurs d'onde pour lesquelles on a déterminé les indices de réfraction n_1, n_2, ... n_m, exprimées au moyen d'une unité tout à fait arbitraire. Si l'on pose

$$\frac{1}{\lambda_1^2} = p_1, \quad \frac{1}{\lambda_2^2} = p_2, \quad \ldots \quad \frac{1}{\lambda_m^2} = p_m,$$

nous aurons par suite les m équations

$$\left.\begin{array}{l} n_1 = A + Bp_1 + Cp_1^2 + \ldots \\ n_2 = A + Bp_2 + Cp_2^2 + \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ n_m = A + Bp_m + Cp_m^2 + \ldots \end{array}\right\} \quad (12)$$

qui permettent de déterminer autant de constantes A, B, ...

Si nous considérons l'équation

$$\frac{p_1 p_2 \ldots p_m}{(p_1 - x)(p_2 - x)\ldots(p_m - x)} = \frac{p_1 \alpha_1}{p_1 - x} + \frac{p_2 \alpha_2}{p_2 - x} + \ldots + \frac{p_m \alpha_m}{p_m - x}, \quad (13)$$

nous voyons, par l'addition des fractions dans le second membre de l'équation, que les quantités α_1, α_2, ... α_m satisfont aux équations

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \dots \alpha_m &= 1 \\ \alpha_1 p_1^s + \alpha_2 p^s + \dots + \alpha_m p_m^s &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

* NOTE 7.

où l'exposant s peut prendre toutes les valeurs entières, depuis 1 jusqu'à $m-1$ inclusivement. En multipliant la première équation (12) par α_1, la seconde par α_2, etc., et en additionnant les résultats, on obtient

$$A = \alpha_1 n_1 + \alpha_2 n_2 + \dots \alpha_m n_m,$$

équation qui peut s'écrire sous cette forme plus propre au calcul numérique

$$A = n_1 + \alpha_2(n_2 - n_1) + \alpha_3(n_3 - n_1) + \dots + \alpha_m(n_m - n_1). \quad (15)$$

Les coefficients α peuvent aisément être déterminés au moyen de l'équation (13) par décomposition de la fraction qui figure au premier membre de l'équation. De cette manière on trouvera

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{p_1 p_2 \dots p_m}{p_1(p_2 - p_1)(p_3 - p_1)\dots(p_m - p_1)}, \\ \alpha_2 &= \frac{p_1 p_2 \dots p_m}{p_2(p_1 - p_2)(p_3 - p_2)\dots(p_m - p_2)}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_m &= \frac{p_1 p_2 \dots p_m}{p_m(p_1 - p_m)(p_2 - p_m)\dots(p_{m-1} - p_m)}. \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

Si nous désignons les longueurs d'onde correspondantes aux flammes de *Li*, *Na*, *Th*, par λ_1, λ_2, λ_3, et si nous choisissons λ_1 comme unité, nous aurons d'après Ketteler $\frac{1}{\lambda_2} = 1{,}138953$, $\frac{1}{\lambda_3} = 1{,}254636$, d'où $p_1 = 1$, $p_2 = 1{,}29721$, $p_3 = 1{,}57411$.

On doit ensuite calculer α_2 et α_3 au moyen de l'équa-

tion (16), où m est égal à 3, et en introduisant ces valeurs dans (15) on trouve

$$A = n_{Li} - 19{,}127\,(n_{Na} - n_{Li}) + 8{,}160\,(n_{Th} - n_{Li}). \quad (17)$$

Pour les formules suivantes on s'est servi comme base des calculs des valeurs déterminées par Ångström tant pour les raies de Fraunhofer que pour les raies du spectre de l'hydrogène. Si l'on désigne les indices de réfraction de ces dernières par n_α, n_β, n_γ, on trouvera

$$A = n_\alpha - 5{,}983\,(n_\beta - n_\alpha) + 3{,}046\,(n_\gamma - n_\alpha). \quad (18)$$

A l'aide des indices de réfraction n_B, n_D, n_E et n_G des raies de Fraunhofer B, D, E, G, on trouve

$$A = n_B - 29{,}857\,(n_D - n_B) + 17{,}197\,(n_E - n_B) - 1{,}4948\,(n_G - n_B) \quad (19)$$

et au moyen des indices de réfraction n_C, n_E, n_F et n_H des raies de Fraunhofer C, E, F, H,

$$A = n_C - 28{,}145\,(n_E - n_C) + 20{,}820\,(n_F - n_C) - 1{,}5082\,(n_H - n_C). \quad (20)$$

Dans les deux dernières formules on a, comme on voit, tenu compte des quatre premiers termes de la formule de dispersion. La question de savoir si l'on peut avantageusement faire encore un pas en avant et tenir compte de plusieurs termes dépend de l'exactitude de la détermination de l'indice de réfraction, les erreurs d'observation ayant toujours sur les valeurs calculées une influence croissante avec le nombre des termes dont on tient compte. Ainsi on reconnaît par les équations ci-dessus qu'une erreur sur un indice de réfraction apparaît dans A presque multipliée par 30. Pour cette raison on ne doit vraisemblablement pas surpasser la limite fournie par les formules indiquées, tant qu'on n'aura pas obtenu

une précision plus grande que celle qu'on a atteinte jusqu'ici en employant le prisme. Si par exemple l'on tient compte des sept premiers termes de la formule de dispersion et que l'on détermine A par les indices des sept raies de Fraunhofer de B à H, on peut multiplier une erreur presque par mille et le résultat deviendra pour ainsi dire indéterminé.

Nous allons maintenant chercher à déterminer l'indice de réfraction réduit de l'eau à 20° C., température au voisinage de laquelle on a fait la plupart des observations.

Rühlmann donne pour cette température

$$n_{Li} = 1{,}33075, \quad n_{Na} = 1{,}33294, \quad n_{Th} = 1{,}33485$$

et il a trouvé par le calcul

$$A = 1{,}32361, \text{ d'où } n_{Na} - A = 0{,}00933.$$

Ici on n'a tenu compte que des deux premiers termes de la formule de dispersion et on ne s'est servi que des deux indices de réfraction correspondant aux raies de *Li* et de *Th*. Si l'on tient compte de trois termes, on obtiendra au moyen de l'équation (17)

$$A = 1{,}32232 \text{ et } n_A - A = 0{,}01062,$$

valeur de A qui est considérablement moindre.

Landolt (Pogg. Ann., t. 117 et t. 122) donne pour les raies du spectre de l'hydrogène à 20° C.

$$n_\alpha = 1{,}33111, \quad n_\beta = 1{,}33712, \quad n_\gamma = 1{,}34038$$

et en a déduit, en ne se servant également que de deux constantes dans la formule de dispersion,

$$A = 1{,}32392,$$

tandis que la formule (18) donne

$$A = 1{,}32338.$$

Wüllner donne pour les mêmes raies et à la même température

$$n_\alpha = 1{,}33116, \quad n_\beta = 1{,}33712, \quad n_\gamma = 1{,}34031,$$

d'où l'on a déduit de la même manière

$$A = 1{,}32190,$$

tandis que la formule (18) donne

$$A = 1{,}32337.$$

Au moyen des résultats presque concordants des deux observateurs, on trouvera en outre

$$n_{Na} = 1{,}33300.$$

Les mesures, faites par Fraunhofer, de l'indice de réfraction de l'eau à 15° R. ont donné des résultats un peu trop grands, mais elles ne sont pourtant pas sans importance pour la détermination de la dispersion. Comme moyenne de deux séries d'expériences, on trouve

$$n_B = 1{,}330956, \quad n_C = 1{,}331711, \quad n_D = 1{,}333577,$$
$$n_E = 1{,}335850, \quad n_F = 1{,}337803, \quad n_G = 1{,}341277,$$
$$n_H = 1{,}344170.$$

On en déduit par la formule (19)

$$n_D - A = 0{,}01211$$

et par la formule (20)

$$n_D - A = 0{,}01030.$$

Négligeant quelques observations moins exactes, je

ne mentionnerai encore que celles de van der Willigen (Verhandl. der K. Acad. Amsterdam, 1868).

La moyenne des observations à 22°,4 C. et à 20° C. donne

$n_B = 1{,}33035$, $n_C = 1{,}33111$, $n_D = 1{,}33295$,
$n_E = 1{,}33519$, $n_F = 1{,}33707$, $n_G = 1{,}34051$,
$n_H = 1{,}34336$,

d'où l'on conclut en vertu de la formule (19)

$$n_D - A = 0{,}01218$$

et par la formule (20)

$$n_D - A = 0{,}01106.$$

Ces nombres combinés avec ceux qui sont déduits des mesures de Fraunhofer ne sont pas valables exactement pour 20° C., mais sont cependant tellement près de l'être qu'une correction relative à l'écart serait presque insignifiante.

On peut donc, comme on voit, trouver des valeurs fort différentes de $n_D - A$ à 20° C., savoir en se servant de la formule de dispersion à deux constantes

0,00891 (Wüllner),
0,00908 (Landolt),
0,00831 (Rühlmann),

de la formule à trois constantes

0,00963 (Wüllner),
0,00962 (Landolt),
0,01062 (Rühlmann),

et de celle à quatre constantes

0,01030 (Fraunhofer),
0,01106 (van der Willigen),
0,01214 (Fraunhofer),
0,01218 (van der Willigen).

Ces résultats sont intéressants sous plusieurs rapports. On voit à quel point est incertaine et difficile la détermination de l'indice de réfraction, car les écarts des résultats obtenus de différentes manières influent même sur la troisième décimale, et on reconnaît que la dispersion des corps en général, l'eau n'étant pas vraisemblablement une exception particulière, ne peut pas être déterminée par l'observation des indices de réfraction de deux ou de trois raies spectrales, ainsi qu'on l'a jusqu'ici supposé habituellement, mais que la dispersion doit nécessairement être l'objet d'un examen plus approfondi et plus particulier.

Les écarts des valeurs de $n_D - A$ citées ci-dessus jouissent pourtant d'une certaine régularité, qui jette quelque jour sur la dispersion de l'eau. On voit par les valeurs plus grandes qu'on obtient, si les calculs sont faits avec trois constantes au lieu de deux, apparaître la convexité de la courbe de dispersion, et on reconnaît de plus que cette convexité est plus grande si la courbe est déterminée par n_{Li}, n_{Na}, n_{Th} que si elle l'est par les indices de réfraction des raies du spectre de l'hydrogène, qui sont plus voisines de la partie la plus réfrangible du spectre. Que ceci ne soit pas accidentel, c'est ce qui devient évident par les valeurs calculées au moyen de quatre constantes, valeurs qui précisément sont plus petites, tant d'après les mesures de Fraunhofer que d'après celles de van der Willigen, si elles sont calculées au moyen des rayons les plus réfrangibles. En outre la

courbe de dispersion est rectiligne d'après les observations de Rühlmann à 80° C.; elle devient de plus en plus convexe, si la température diminue, et, comme nous l'avons vu, cette loi est valable en particulier pour la partie la moins réfrangible du spectre. Par suite l'indice de réfraction pour la raie *D* par exemple croît en même temps que décroît la température, même si la température est inférieure à 4°, ce qui vraisemblablement provient de la convexité croissante de la courbe et non d'un accroissement de l'indice de réfraction réduit. Il est vraisemblable aussi dans une certaine mesure que le maximum de l'indice de réfraction, qui peut-être a lieu précisement à 0° pour une longueur d'onde comprise entre *D* et *E*, est de nouveau situé à une température plus élevée pour la partie la plus réfrangible du spectre; ainsi il est peut-être situé à peu près à 2° pour la raie *H*.

Si nous cherchons à déterminer l'indice de réfraction réduit de l'eau par les observations citées ci-dessus, on reconnaît que, bien qu'on ne puisse pas obtenir une grande précision, la valeur de cet indice doit pourtant être estimée notablement plus petite que celle qu'on lui a attribuée jusqu'ici. L'évaluation au moyen de quatre constantes doit être la plus correcte, et parmi les valeurs obtenues dans ce cas celles de van der Willigen doivent être les plus exactes, parce qu'elles concordent le mieux entre elles. Leur moyenne donne

$$n_D - A = 0{,}0116,$$

tandis que tous les autres observateurs, Fraunhofer excepté, ont trouvé presque la même valeur

$$n_D = 1{,}3330,$$

d'où il suit que

$$A = 1,3214,$$

valeur qui s'applique à l'eau à 20°.

Si nous faisons l'hypothèse, qui à présent doit être pour plusieurs raisons réputée vraisemblable, que l'indice de réfraction a son maximum à la même température que celle du poids spécifique de l'eau, on trouvera, comme on l'a remarqué, que la valeur a qui entre dans les équations (C') et (C'') est égale à 21,744, si l'on part de la formule de Mathiessen, ou bien, comme cette formule donne une température un peu trop grande pour ce maximum (4°,15 C.), plus exactement

$$a = 21,05,$$

valeur qui correspond à un maximum de l'indice de réfraction réduit situé précisément à 4° C.

Au moyen de l'équation (C'') on trouve de plus

$$A(0) = 1,3219,$$

ce qui fait que cette équation peut s'écrire sous la forme

$$A(t) = 1,3219 - 10^{-6}[21,05t - 2,758t^2 + 0,02134t^3], \quad (C'')$$

qui est valable de $t = 0°$ à $t = 30°$ C.

II.

Théorie de l'indice de réfraction réduit.

Comme point de départ des présentes recherches nous nous servirons des équations différentielles des vibrations lumineuses que j'ai établies dans les Annales de Pogg., t. 118 et t. 121 (quatrième et cinquième mémoire de cette édition). Ces équations sont

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}-\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}-\frac{\partial \xi}{\partial z}\right)&=\frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2},\\
\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \eta}{\partial z}-\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}-\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)&=\frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2},\\
\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}-\frac{\partial \xi}{\partial z}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \eta}{\partial z}-\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)&=\frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2},
\end{aligned}\right\}\quad (A)$$

où x, y, z désignent les coordonnées d'un point de l'espace, t le temps, ξ, η, ζ les composantes de la vibration lumineuse suivant les trois axes et ω une fonction de x, y, z.

La dernière fonction se réduit à une constante pour un milieu véritablement homogène et désigne alors la vitesse de la lumière dans ce milieu; mais seul le vide, c'est-à-dire l'espace qui ne contient aucune masse appréciable de matière pondérable, peut être considéré comme véritablement homogène, tandis que tous les corps dits homogènes ne peuvent être considérés comme tels qu'e napparence. La fonction ω est donc pour de pareils milieux une fonction périodique des coordonnées de l'espace, c'est-à-dire la somme d'une constante et d'une quantité dont la valeur varie d'une manière continue avec les coordonnées et qui reprend régulièrement les mêmes valeurs dans les mêmes intervalles ou périodes.

Les intégrales générales des équations différentielles ci-dessus peuvent être écrites sous la forme d'une somme de termes dont chacun contient l'un des facteurs

$$C = \cos(kt - lx - my - nz - d)$$

ou

$$S = \sin(kt - lx - my - nz - d),$$

où k, l, m, n, d sont des constantes dont la valeur change d'un terme à l'autre.

Ces facteurs sont, comme on voit, des fonctions péri-

odiques tant par rapport à l'espace qu'au temps et représentent une onde plane progressive, dont la période dans la direction de la normale au front de l'onde est la longueur d'onde, et dont la période relative au temps est la durée d'une vibration. Le rapport de ces quantités est la vitesse de la lumière.

Comme coefficients de ces facteurs figurent des quantités qui dépendent seulement de la fonction ω, la seule fonction donnée de x, y, z qui entre dans les équations différentielles, et qui par conséquent doivent être comme elle des fonctions périodiques. Ces fonctions périodiques peuvent être considérées chacune en particulier comme la somme de deux termes, savoir d'une quantité constante, qui est la valeur moyenne de la fonction, et d'une fonction purement périodique, c'est-à-dire d'une fonction dont la moyenne est nulle. La moyenne de la fonction s'obtient en multipliant celle-ci par $dxdydz$ et intégrant dans toute l'étendue du volume du corps, ou au moins dans une partie suffisamment grande, et en divisant par ce volume.

Si nous n'avons en vue que le terme de l'intégrale générale qui correspond à une onde plane isolée, nous pouvons écrire

$$\left.\begin{aligned} \xi &= (\xi_0 + \xi_2)\,C + \xi_1 S, \\ \eta &= (\eta_0 + \eta_2)\,C + \eta_1 S, \\ \zeta &= (\zeta_0 + \zeta_2)\,C + \zeta_1 S, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

ξ_0, η_0, ζ_0 étant des constantes et ξ_2, η_2, ζ_2, ξ_1, η_1, ζ_1 des fonctions périodiques. Dans les coefficients de S on a négligé les constantes, car on peut supposer qu'elles sont devenues nulles par une transformation de coordonnées. Le problème que nous avons en vue est seulement de déterminer l'indice de réfraction réduit du corps en

question, c'est-à-dire la limite dont s'approche le rapport des vitesses dans le vide et dans le corps quand la longueur d'onde croît indéfiniment. Nous faisons par conséquent l'hypothèse que la période de C et S dans la direction de la normale est d'un ordre plus grand d'une unité que les périodes de ξ_1, ξ_2, etc.* * NOTE 8.

Si dans les équations différentielles (A) on introduit les expressions de ξ, η, ζ fournies par les équations (1), les différentiations donneront des quantités de différents ordres. Tandis que

$$\xi_2 \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad \text{et} \quad \xi_2 \frac{\partial^2 C}{\partial t^2} \frac{1}{\omega^2}$$

par exemple sont en général des quantités du même ordre, $\frac{\partial^2 \xi_2}{\partial x^2} C$ est au contraire d'un ordre plus grand de deux unités, parce que la période de ξ_2 est présumée d'un ordre plus petit d'une unité que celle de C.

Or tous les termes de l'ordre le plus élevé doivent se détruire mutuellement, et par conséquent on obtient, après avoir fait la substitution mentionnée dans la première équation (A),

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \xi_2}{\partial y} - \frac{\partial \eta_2}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \zeta_2}{\partial x} - \frac{\partial \xi_2}{\partial z}\right) = 0.$$

Au moyen des deux autres équations (A) on obtiendra des expressions analogues.

Il s'ensuit qu'on doit avoir

$$\xi_2 = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad \eta_2 = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad \zeta_2 = \frac{\partial F}{\partial z}* \qquad (2)$$ * NOTE 9.

où F est une fonction périodique.

Si l'on différentie la première équation (A) par rapport à x, la seconde par rapport à y et la troisième par

rapport à z, on obtiendra en les additionnant

$$0 = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}\right),$$

et par conséquent, en négligeant les quantités d'ordre inférieur,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{\omega^2}\left(\xi_0 + \frac{\partial F}{\partial x}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{\omega^2}\left(\eta_0 + \frac{\partial F}{\partial y}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{\omega^2}\left(\zeta_0 + \frac{\partial F}{\partial z}\right)\right] = 0. \quad (3)$$

Cette équation détermine la fonction F, qui doit en outre, par suite des équations (2), satisfaire à la condition que ses dérivées par rapport à x, y, z soient des fonctions périodiques.

Si dv est un élément de volume du corps, v le volume total ou une partie du volume suffisamment grande, on doit par conséquent avoir

* NOTE 10. $$\int \frac{dv}{v}\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad \int \frac{dv}{v}\frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad \int \frac{dv}{v}\frac{\partial F}{\partial z} = 0^{*}, \quad (4)$$

l'intégration étant étendue à tout le volume v.

On doit de plus déduire des équations (A) les équations qui serviront à la détermination de l'indice de réfraction réduit. Si l'on introduit les expressions de ξ, η, ζ dans les équations (A), et si l'on compare les coefficients de C, on obtiendra par la première équation

$$(l^2 + m^2 + n^2)\xi_0 - l(l\xi_0 + m\eta_0 + n\zeta_0) + \Sigma = \frac{k^2}{\omega^2}(\xi_0 + \xi_1),$$

Σ étant une somme de fonctions périodiques, que nous n'avons pas besoin de définir avec plus de précision.

Si nous multiplions l'équation ainsi obtenue par $\frac{dv}{v}$ et si nous intégrons dans toute l'étendue du volume v, cette somme Σ s'évanouira; et si l'on remplace, en vertu de l'équation (2), ξ_1 par $\frac{\partial F}{\partial x}$, on obtiendra au moyen de la première équation (A) la première des trois relations

$$\left.\begin{aligned} {}^2 + m^2 + n^2)\xi_0 - l(l\xi_0 + m\eta_0 + n\zeta_0) &= \int\frac{dv}{r}\frac{k^2}{\omega^2}\left(\xi_0 + \frac{\partial F}{\partial x}\right), \\ {}^2 + m^2 + n^2)\eta_0 - m(l\xi_0 + m\eta_0 + n\zeta_0) &= \int\frac{dv}{r}\frac{k^2}{\omega^2}\left(\eta_0 + \frac{\partial F}{\partial y}\right), \\ {}^2 + m^2 + n^2)\zeta_0 - n(l\xi_0 + m\eta_0 + n\zeta_0) &= \int\frac{dv}{r}\frac{k^2}{\omega^2}\left(\zeta_0 + \frac{\partial F}{\partial z}\right), \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

dont les deux dernières sont déduites d'une manière analogue.

Mais la vitesse de la lumière dans le corps est en général, d'après la définition de la page 258, exprimée par le rapport

$$\frac{k}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}},$$

et si la vitesse dans le vide est O, l'indice de réfraction cherché sera déterminé par

$$A = \frac{O\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}{k}.$$

Ce rapport n'est pas en général le même pour toutes les directions de vibration, mais on peut cependant toujours, comme je l'ai démontré ailleurs (Pogg. Ann., t. 118; quatrième mémoire de la présente édition), choisir les directions des axes de coordonnées rectangulaires de telle manière que les vibrations qui s'effectuent dans les directions des axes se propagent dans une direction perpendiculaire aux axes. Si l'on considère seulement les vibrations qui s'effectuent dans la direction de l'axe des x, on peut poser

$$\eta_0 = 0, \quad \zeta_0 = 0,$$

et alors la normale à l'onde plane est perpendiculaire à l'axe des x, d'où il suit que

$$l = 0,$$

Par conséquent l'indice de réfraction relatif a[…] vibrations, indice que nous désignerons par A_1, a[…] pour expression

$$A_1 = \frac{\Omega\sqrt{m^2 + n^2}}{k}.$$

Nous remplacerons F par une fonction nouv[…] déterminée par l'équation

$$F = ex + \varphi(e + \xi_0),$$

où e est une constante, et nous poserons

$$\frac{\Omega^2}{\omega^2} = 1 + \psi,$$

où ψ est une fonction périodique qui s'évanouira […] dehors du corps, si l'on suppose qu'il est entouré pa[…] vide, pour lequel ω est égal à Ω.

Ces substitutions transforment l'équation (3) en

$$\Delta\varphi + \frac{\partial}{\partial x}\psi\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\psi\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\psi\frac{\partial\varphi}{\partial z} = -\frac{\partial\psi}{\partial x},$$

où

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2},$$

tandis que la première équation (4) devient

$$e - (e + \xi_0)\int\frac{dv}{v}\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0.$$

La première équation (5) donnera pour $t = 0$

$$(m^2 + n^2)\xi_0 = \int\frac{dv}{v}\frac{k^2}{\Omega^2}(1 + \psi)\left(1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)(e + \xi_0).$$

Si l'on pose

$$\frac{\Omega^2(m^2 + n^2)}{k^2} = A_1^2,$$

on trouvera, en éliminant c au moyen de l'équation précédente, que l'indice de réfraction réduit est déterminé pour les vibrations parallèles à l'axe des x par

$$A_1^2\left(1+\int\frac{dv}{v}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)=\int\frac{dv}{v}(1+\psi)\left(1+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right). \qquad (8)$$

Dans cette équation il faut déterminer φ au moyen de l'équation différentielle (7) combinée aux deux conditions qui résultent des équations (4), à savoir

$$\int\frac{dv}{v}\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0, \quad \int\frac{dv}{v}\frac{\partial\varphi}{\partial z}=0. \qquad (9)$$

Nous considérons comme démontré qu'on peut choisir les directions des axes de coordonnées de manière à avoir en même temps

$$\eta_0=0, \quad \zeta_0=0 \quad \text{et} \quad l=0,$$

d'où résulte que les deux dernières équations (5) deviennent

$$\int\frac{dv}{v}(1+\psi)\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0 \quad \text{et} \quad \int\frac{dv}{v}(1+\psi)\frac{\partial\varphi}{\partial z}=0. \qquad (10)$$

On suppose donc que ces conditions sont déjà remplies par le choix des directions des axes.

De l'équation différentielle (7) on déduit par intégration

$$\varphi=\frac{1}{4\pi}\left[\frac{\partial}{\partial x}\int\frac{dv'}{r}\psi'\left(\frac{\partial\varphi'}{\partial x'}+1\right)+\frac{\partial}{\partial y}\int\frac{dv'}{r}\psi'\frac{\partial\varphi'}{\partial y'}+\frac{\partial}{\partial z}\int\frac{dv'}{r}\psi'\frac{\partial\varphi'}{\partial z'}\right]^{*} \qquad (11)$$ *NOTE 11.

où l'on a

$$r=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2},$$
$$dv'=dx'dy'dz',$$

et où ψ' et φ' sont deux fonctions formées avec x', y', z' comme φ et ψ le sont avec x, y, z.

On peut ici supposer que l'intégration est étendue à tout l'espace infini; mais on voit que tous les éléments de l'intégrale pour lesquels le point (x', y', z') est situé en dehors du corps s'évanouissent par la raison que ψ' est nul ici.

Nous introduirons cette valeur de φ dans l'expression

$$\int \frac{dv}{v} \frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

Nous supposerons que le volume aux limites duquel cette intégrale doit être étendue, et qui doit seulement satisfaire à la condition d'être assez grand pour que l'intégrale puisse représenter la moyenne de $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, est une sphère située à l'intérieur du corps et ayant son centre à l'origine avec un rayon R suffisamment grand.

Si l'on pose

$$dv = \rho^2 \sin\theta \, d\rho \, d\theta \, d\omega,$$

l'expression ci-dessus peut s'écrire

$$\int_0^R \frac{\rho^2 d\rho}{v} \int_0^\pi \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\omega \left(\cos\theta \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} - \frac{\sin\theta}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right).$$

En intégrant par parties le dernier terme par rapport à θ, on transforme cette expression en

$$\int_0^R \frac{d\rho}{v} \int_0^\pi \sin\theta \cos\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\omega \, \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^2 \varphi). \tag{12}$$

Si l'on désigne par P la partie de cette intégrale qu'on obtient en remplaçant φ par le premier terme de (11) et si l'on pose

$$\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int\frac{dv'}{r}\psi'\left(\frac{\partial\varphi'}{\partial x'}+1\right)$$

$$=\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial\rho}-\frac{\sin\theta}{\rho}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\int_0^\infty\rho'^2 d\rho'\int_0^\pi\sin\theta' d\theta'\int_0^{2\pi}d\omega'\frac{f'}{r},$$

en introduisant des coordonnées sphériques et en remplaçant pour abréger $\frac{1}{4\pi}\psi'\left(\frac{\partial\varphi'}{\partial x'}+1\right)$ par f', on obtiendra

$$P=\int_0^R\frac{d\rho}{v}\int_0^\pi\sin\theta\, d\theta\int_0^{2\pi}d\omega\frac{\partial}{\partial\rho}\rho^2\left(\cos^2\theta\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{3\cos^2\theta-1}{\rho}\right)\int_0^\infty\rho'^2 d\rho'\int_0^\pi\sin\theta' d\theta'\int_0^{2\pi}d\omega'\frac{f'}{r}$$

où

$$r=\sqrt{\rho^2+\rho'^2-2\rho\rho'(\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\omega-\omega'))}.$$

Mais on a, comme on sait,

$$\int_0^\pi\sin\theta\, d\theta\int_0^{2\pi}d\omega\frac{1}{r}=\begin{cases}\dfrac{4\pi}{\rho}\ \text{pour}\ \rho>\rho'\\[2mm] \dfrac{4\pi}{\rho'}\ \text{pour}\ \rho<\rho',\end{cases}$$

et

$$\int_0^\pi\sin\theta\, d\theta\int_0^{2\pi}d\omega\frac{3\cos^2\theta-1}{r}=\begin{cases}\frac{4}{3}\pi(3\cos^2\theta'-1)\dfrac{\rho'^2}{\rho^3}\ \text{pour}\ \rho>\rho'\\[2mm] \frac{4}{3}\pi(3\cos^2\theta'-1)\dfrac{\rho^2}{\rho'^3}\ \text{pour}\ \rho<\rho'.*\end{cases}$$ *NOTE

En vertu de ces formules on obtiendra

$$P=\frac{4}{3}\pi\int_0^\pi\sin\theta' d\theta'\int_0^{2\pi}d\omega'\int_0^R\frac{d\rho}{v}\frac{\partial}{\partial\rho}\left[-\int_0^\rho\rho'^2 f' d\rho'+5\left(\cos^2\theta'-\frac{1}{3}\right)\rho^3\int_\rho^\infty\frac{d\rho'}{\rho'}f'\right].$$

Or on a

$$\int_0^R\frac{d\rho}{v}\frac{\partial}{\partial\rho}\int_0^\rho\rho'^2 f' d\rho'=\int_0^R\frac{d\rho'}{v}\rho'^2 f'$$

et

$$\tfrac{4}{3}\pi\int_0^R \frac{d\rho}{v}\frac{\partial}{\partial\rho}\rho^3\int_\rho^\infty \frac{d\rho'}{\rho'}f' = \int_R^\infty \frac{d\rho'}{\rho'}f',$$

car

$$v = \tfrac{4}{3}\pi R^3.$$

Comme on peut supposer que le corps et par suite R est aussi grand qu'on veut, le terme $\int_R^\infty \frac{d\rho'}{\rho'}f'$ a une valeur insignifiante et on obtient seulement

$$P = -\tfrac{4}{3}\pi\int_0^R \frac{d\rho'}{v}\rho'^2\int_0^\pi \sin\theta' d\theta'\int_0^{2\pi} d\omega' f',$$

ou, en revenant aux coordonnées rectangulaires et en remplaçant f' par sa valeur originelle,

$$P = -\tfrac{1}{3}\int\frac{dv}{v}\psi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}+1\right).$$

Reste encore à remplacer φ dans l'intégrale (12) par les deux derniers termes de l'équation (11). Mais en faisant sur ces deux termes des calculs analogues aux
* NOTE 13. précédents, on trouvera pour résultat zéro*, et on obtiendra par conséquent

$$\int\frac{dv}{v}\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\tfrac{1}{3}\int\frac{dv}{v}\psi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}+1\right). \qquad (13)$$

D'une manière analogue on obtiendrait

$$\int\frac{dv}{v}\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\tfrac{1}{3}\int\frac{dv}{v}\psi\frac{d\varphi}{\partial y}$$

et

$$\int\frac{dv}{v}\frac{\partial\varphi}{\partial z} = -\tfrac{1}{3}\int\frac{dv}{v}\psi\frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

Ces équations montrent que l'intégrale φ déterminée par l'équation (11) satisfait aux deux conditions (9), car celles-ci peuvent à présent être déduites des équations (10) au moyen des deux équations ci-dessus.

L'indice de réfraction réduit A_1, correspondant aux vibrations parallèles à l'axe des x, était dans l'équation (8) déterminé par

$$A_1^2\left(1+\int\frac{dv}{v}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) = \int\frac{dv}{v}(1+\psi)\left(1+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right);$$

au moyen de (13) nous pouvons éliminer $\int\frac{dv}{v}\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ et nous obtiendrons de cette manière

$$\frac{A_1^2-1}{A_1^2+2}v = \tfrac{1}{3}\int dv\,\psi\left(1+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right). \tag{14}$$

De même nous pouvons déterminer l'indice de réfraction correspondant aux vibrations parallèles aux axes des y ou des z, et nous pouvons aisément former d'une manière semblable les équations analogues à (14) et (7). Il va sans dire que pour les corps isotropes les calculs exécutés ci-dessus sont valables en général pour une direction quelconque des vibrations.

Les calculs ont jusqu'ici été faits sans intervention d'aucune hypothèse. Mais si l'on compare le résultat obtenu par le calcul avec les résultats des expériences, on reconnaît qu'il se présente une hypothèse très naturelle, dont il faut développer les conséquences théoriques, et l'on verra alors s'il est possible d'obtenir de cette manière des connaissances sur la constitution moléculaire des corps.

On sait que les expériences montrent avec un certain degré d'approximation que le pouvoir réfringent $(A^2-1)v$ et aussi $(A-1)v$, qu'on peut encore écrire

sous la forme $\frac{A^2-1}{A+1}v$, conserve une valeur constante par les variations de volume du corps. On peut en conclure que la fonction du volume et de l'indice de réfraction

$$\frac{A^2-1}{A^2+2}v$$

donnée par la relation (14) doit de même être supposée
* NOTE 14. approximativement constante.*

On doit donc en premier lieu rechercher si cette propriété dépend de l'invariabilité de la fonction ψ, ou, ce qui revient au même, de l'indice de réfraction moléculaire. Une conséquence immédiate de cette invariabilité sera alors la possibilité d'admettre des molécules invariables séparées par des intervalles vides. Ces molécules doivent nécessairement être considérées comme transparentes, car dans le cas contraire le corps ne pourrait pas être lui-même parfaitement transparent.

D'après cette hypothèse, la fonction $\psi = \frac{O^2}{\omega^2} - 1$ est invariable à l'intérieur des molécules et nulle en dehors de celles-ci, de sorte que tous les éléments de l'intégrale qui figure dans (14) s'évanouissent au dehors des molécules. Cette intégrale contient encore, outre le terme invariable ψ, la fonction φ, que nous chercherons à déterminer plus complètement pour les corps isotropes, sans faire pourtant aucune hypothèse nouvelle pouvant restreindre l'idée de la forme des molécules ou de leur indice de réfraction.

Il sera ainsi indifférent pour les calculs qui suivent de supposer qu'une molécule est simple ou constituée par un système invariable de plusieurs molécules.

Dans un corps isotrope nous supposerons que les molécules sont disposées irrégulièrement, de telle manière

que toutes les molécules de même nature se trouvent orientées dans toutes les directions possibles.

Si l'on attache à chaque molécule un système de coordonnées qui lui soit invariablement lié, et si les axes. que nous désignerons par a, b, c, passent par des points analogues dans les molécules de même nature, un point d'un des axes parcourra successivement tous les éléments d'une surface sphérique, si l'on passe d'une molécule à l'autre.

On a déduit l'intégrale (11) de l'équation différentielle (7) qui donne la fonction φ. Cette intégrale peut encore s'écrire

$$\varphi = \frac{1}{4\pi}\int\frac{dv'}{r}\left[\frac{\partial}{\partial x'}\psi'\left(\frac{\partial\varphi'}{\partial x'}+1\right)+\frac{\partial}{\partial y'}\psi'\frac{\partial\varphi'}{\partial y'}+\frac{\partial}{\partial z'}\psi'\frac{\partial\varphi'}{\partial z'}\right].$$

Cette intégrale, qui est étendue à tout le corps, peut être divisée en deux parties, dont l'une comprend seulement l'unique molécule à laquelle appartient le point (x, y, z), et dont l'autre s'étend à toutes les autres molécules du corps. Nous désignerons la première partie par $\int^{(i)}$ et la seconde par $\int^{(e)}$.

Si l'on pose

$$\left.\begin{aligned}
X &= \frac{1}{4\pi}\int^{(i)}\frac{dv'}{r}\left[\frac{\partial}{\partial x'}\psi'\left(\frac{\partial X'}{\partial x'}+1\right)+\frac{\partial}{\partial y'}\psi'\frac{\partial X'}{\partial y'}+\frac{\partial}{\partial z'}\psi'\frac{\partial X'}{\partial z'}\right],\\
X_1 &= \frac{1}{4\pi}\int^{(e)}\frac{dv'}{r}\left[\frac{\partial}{\partial x'}\psi'\left(\frac{\partial X'}{\partial x'}+1\right)+\frac{\partial}{\partial y'}\psi'\frac{\partial X'}{\partial y'}+\frac{\partial}{\partial z'}\psi'\frac{\partial X'}{\partial z'}\right],\\
X_2 &= \frac{1}{4\pi}\int^{(i)}\frac{dv'}{r}\left[\frac{\partial}{\partial x'}\psi'\frac{\partial X_1'}{\partial x'}+\frac{\partial}{\partial y'}\psi'\frac{\partial X_1'}{\partial y'}+\frac{\partial}{\partial z'}\psi'\frac{\partial X_1'}{\partial z'}\right],\\
X_3 &= \frac{1}{4\pi}\int^{(e)}\frac{dv'}{r}\left[\frac{\partial}{\partial x'}\psi'\frac{\partial X_1'}{\partial x'}+\frac{\partial}{\partial y'}\psi'\frac{\partial X_1'}{\partial y'}+\frac{\partial}{\partial z'}\psi'\frac{\partial X_1'}{\partial z'}\right],\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \quad (15)$$

et ainsi de suite à l'infini, on obtiendra l'expression ci-dessus de φ, en posant

* NOTE 15. $$X + X_1 + X_2 + X_3 + \ldots = \varphi^*. \quad (16)$$

Les expressions analogues, qu'on obtient en remplaçant les lettres X et x par Y et y ou par Z et z, seront désignées par Y, Y_1, Y_2, ..., Z, Z_1, Z_2, ...

Si l'on a déterminé une fonction A des coordonnées a, b, c, correspondant à la molécule en question, par l'équation

$$A = \frac{1}{4\pi}\int^{(i)}\frac{dv'}{r}\left[\frac{\partial}{\partial a'}\psi'\left(\frac{\partial A'}{\partial a'}+1\right)+\frac{\partial}{\partial b'}\psi'\frac{\partial A'}{\partial b'}+\frac{\partial}{\partial c'}\psi'\frac{\partial A'}{\partial c'}\right],$$

où a, b, c, a', b', c' remplacent x, y, z, x', y', z', et deux autres fonctions analogues B, C par les deux équations analogues, obtenues en remplaçant A et a par B et b ou par C et c, on peut alors facilement déterminer la fonction X valable pour toute autre position de la molécule. Cette position est déterminée par l'angle θ que fait l'axe des x avec l'axe des a, et par l'angle ω que fait le plan des coordonnées (a, b) avec un plan passant par l'axe
* NOTE 16. des x et l'axe des a.*

Multiplions par $\cos\theta$ l'équation ci-dessus, qui détermine A, et par $\sin\theta\cos\omega$, $\sin\theta\sin\omega$ respectivement les équations qui déterminent B et C; puis additionnons les trois équations obtenues de cette manière. En remar-
* NOTE 17. quant qu'on aura pour toute fonction F*

$$\frac{\partial}{\partial a}\psi\frac{\partial F}{\partial a}+\frac{\partial}{\partial b}\psi\frac{\partial F}{\partial b}+\frac{\partial}{\partial c}\psi\frac{\partial F}{\partial c} = \frac{\partial}{\partial x}\psi\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\psi\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}\psi\frac{\partial F}{\partial z},$$

et qu'on a de plus

$$\frac{\partial\psi'}{\partial a'}\cos\theta+\frac{\partial\psi'}{\partial b'}\sin\theta\cos\omega+\frac{\partial\psi'}{\partial c'}\sin\theta\sin\omega = \frac{\partial\psi'}{\partial x'},$$

on reconnaîtra que la somme a la même forme que la première équation (15), et, en comparant cette somme avec cette équation, on obtiendra

$$X = A\cos\theta+B\sin\theta\cos\omega+C\sin\theta\sin\omega.$$

Nous chercherons maintenant à déterminer la valeur des termes obtenus en remplaçant successivement dans (14) φ par X, X_1, etc., et nous déterminerons en premier lieu

$$\int dv\,\psi\frac{\partial X}{\partial x},$$

où l'intégrale embrasse toutes les molécules du corps. On peut effectuer cette intégration en passant d'un point d'une molécule au point correspondant d'une autre de même nature et en continuant de cette manière à parcourir toutes les molécules de même nature, situées dans des positions différentes, et ensuite en passant du premier point à tous les autres points de la molécule. On peut exprimer ceci d'une manière plus brève, ce que nous préférerons dans ce qui suit, en disant qu'on remplace dans l'intégrale ci-dessus l'élément correspondant au point (a, b, c) d'une molécule par la moyenne de toutes les valeurs que prend cet élément quand on fait tourner la molécule dans toutes les directions. Si la position de la molécule est déterminée comme ci-dessus par les angles θ et ω, on posera

$$\int dv\,\psi\frac{\partial X}{\partial x} = \int dv\,\psi\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta\int_0^{2\pi}d\omega\,\frac{\partial X}{\partial x}.$$

Nous avons

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial a}\cos\theta + \frac{\partial X}{\partial b}\sin\theta\cos\omega + \frac{\partial X}{\partial c}\sin\theta\sin\omega\,,$$

et

$$X = A\cos\theta + B\sin\theta\cos\omega + C\sin\theta\sin\omega\,.$$

Si nous introduisons ces valeurs dans l'équation précédente, nous obtiendrons par intégration

$$\int dv\,\psi\frac{\partial X}{\partial x} = \tfrac{1}{3}\int dv\,\psi\left(\frac{\partial A}{\partial a} + \frac{\partial B}{\partial b} + \frac{\partial C}{\partial c}\right), \qquad (17)$$

expression qui est indépendante de la distance des molécules et aussi, d'après notre hypothèse, du volume et de la température du corps.

Nous déterminerons en second lieu l'intégrale

$$\int dv\,\psi\frac{\partial X_1}{\partial x}\,,$$

où X_1 est donné par la seconde équation (15), qui en vertu de la première équation peut s'écrire sous la forme plus courte

$$X_1 = -\frac{1}{4\pi}\int^{(e)}\frac{dv'}{r}\Delta' X',$$

$$\Delta' = \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2} = \frac{\partial^2}{\partial a'^2} + \frac{\partial^2}{\partial b'^2} + \frac{\partial^2}{\partial c'^2}\,.$$

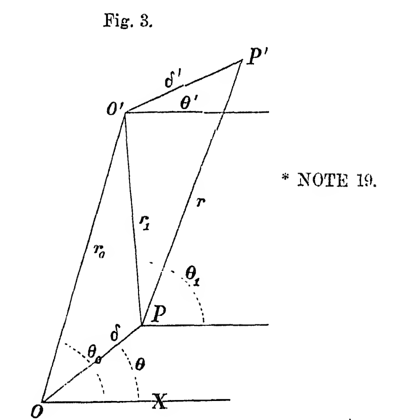
Dans la figure (3) on a pris pour origine O du système de coordonnées un point de la molécule situé de telle manière qu'on puisse faire tourner la molécule autour de ce point sans troubler l'équilibre mutuel des molécules*. Nous appellerons un tel point le point central de la molécule. P est un point de la même molécule déterminé par les coordonnées x, y, z ou par les coordonnées sphériques $OP = \delta$ distance à l'origine, θ angle que fait l'axe des x avec OP, et ω angle d'incli-

* NOTE 18.

naison du plan xOP sur le plan des xy. Soit de plus O' le point central d'une autre molécule déterminé par les coordonnées x_0, y_0, z_0; P' un point de cette molécule déterminé comme P par les coordonnées x', y', z', ou par $O'P' = \delta'$ et les angles θ' et ω'. Nous posons encore $PP' = r$, $PO' = r_1$ et $OO' = r_0$, et les directions des deux dernières lignes sont de la même manière déterminées par les angles θ_1, ω_1 et θ_0, ω_0.

On suppose que le système fixe de coordonnées est placé dans la seconde molécule (en O') de manière que l'axe des a' coïncide avec $O'P'$ et que les plans des $a'b'$ et des xy fassent tous deux le même angle ω' avec le plan $X'O'P'$.* * NOTE 19.

Fig. 3.



La moyenne de $\frac{1}{r}\Delta'X'$ pour toutes les positions de la seconde molécule sera, si l'on fait tourner celle-ci autour de O',

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^\pi \sin\theta' d\theta' \int_0^{2\pi} \frac{d\omega'}{r}\,\Delta'X',$$

où

$$r = \sqrt{r_1^2 + \delta'^2 - 2r_1\delta'(\cos\theta'\cos\theta_1 + \sin\theta'\sin\theta_1\cos(\omega' - \omega_1))}$$

et

$$X' = A'\cos\theta' + B'\sin\theta'\cos\omega' + C'\sin\theta'\sin\omega'.$$

Si l'on exécute l'intégration, on obtiendra

$$\frac{\delta'}{3r_1^2}[\Delta'A'\cos\theta_1 + \Delta'B'\sin\theta_1\cos\omega_1 + \Delta'C'\sin\theta_1\sin\omega_1],$$

expression qui peut, en vertu des équations $r_1 \cos\theta_1 = x_0 - x$, $r_1 \sin\theta_1 \cos\omega_1 = y_0 - y$, $r_1 \sin\theta_1 \sin\omega_1 = z_0 - z$, s'écrire sous la forme

$$\frac{\delta'}{3}\left[\Delta' A' \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r_1} + \Delta' B' \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{r_1} + \Delta' C' \frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{r_1}\right].$$

Ensuite on peut supposer qu'on fait tourner le corps autour de l'origine O, point central de la première molécule, pendant que la molécule reste immobile. Dans l'expression ci-dessus c'est seulement r_1 qui variera par cette opération, et comme

$$r_1 = \sqrt{\rho_0^2 + \delta^2 - 2 r_0 \delta (\cos\theta_0 \cos\theta + \sin\theta_0 \sin\theta \cos(\omega_0 - \omega))},$$

on trouvera comme moyenne de $\frac{1}{r_1}$ pour toutes les positions

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^\pi \sin\theta_0 d\theta_0 \int_0^{2\pi} dw_0 \frac{1}{r_1} = \frac{1}{r_0}.$$

Cette quantité étant indépendante de x, y, z, si on l'introduit dans l'expression ci-dessus, on obtiendra la valeur zéro. Par conséquent on aura aussi

$$\int dv \psi \frac{\partial X_1}{\partial x} = 0. \tag{18}$$

Nous chercherons ensuite la valeur de

$$\int dv \psi \frac{\partial X_2}{\partial x},$$

où X_2 est en vertu de la troisième équation (15) déterminé par

$$X_2 = \frac{1}{4\pi}\int^{(i)} \frac{dv'}{r}\left[\frac{\partial}{\partial x'}\psi' \frac{\partial X_1'}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial y'}\psi' \frac{\partial X_1'}{\partial y'} + \frac{\partial}{\partial z'}\psi' \frac{\partial X_1'}{\partial z'}\right].$$

Ici dv' est un élément de volume de la première molécule, dans laquelle est situé le point O. La position

de cette molécule ne variant pas dans les calculs ci-dessus, le résultat trouvé sera encore valable ici, et par conséquent la moyenne de X'_1 sera nulle. On aura donc

$$\int dv\,\psi\,\frac{\partial X_2}{\partial x} = 0.$$

Nous allons chercher de plus la valeur de

$$\int dv\,\psi\,\frac{\partial X_3}{\partial x};$$

nous savons en vertu de la quatrième équation (15) que

$$X_3 = \frac{1}{4\pi}\int^{(e)}\frac{dv'}{r}\left[\frac{\partial}{\partial x'}\psi'\frac{\partial X'_1}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial y'}\psi'\frac{\partial X'_1}{\partial y'} + \frac{\partial}{\partial z'}\psi'\frac{\partial X'_1}{\partial z'}\right],$$

et

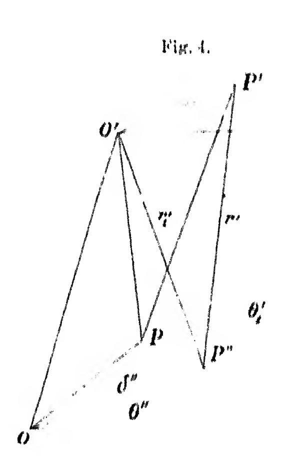
$$X'_1 = -\frac{1}{4\pi}\int^{(e)}\frac{dv''}{r'}\Delta'' X'';$$

dv' appartient à une molécule autre que la première dans laquelle est situé O, et dv'' à une molécule différente de celle qui contient O'. Un point de cette troisième molécule est déterminé par x'', y'', z'', et r' est la distance de (x', y', z') à (x'', y'', z''). Il faut à présent distinguer deux cas différents, selon que la troisième molécule diffère de la première ou qu'elle lui est identique.

Dans le premier cas on peut procéder comme ci-dessus, avec cette différence toutefois que c'est à présent la troisième molécule qu'on fait tourner autour de son point central, pendant que le corps dans son ensemble tourne autour du point O' de la seconde molécule. Ici s'élève cependant une difficulté: la première molécule doit rester à sa place pendant la durée du

mouvement, car les coordonnées x, y, z ne doivent pas varier; mais cela est en général impossible sans faire varier la position relative des autres molecules, et il serait nécessaire de tenir compte dans les calculs de ces variations. Pour cette raison il est nécessaire de supposer que la rotation du corps s'opère pendant que la position de la première moléeule et celle des molécules ambiantes éprouvent de petites variations, de telle manière que les conditions d'équilibre du corps soient satisfaites. Il est cependant évident qu'on peut satisfaire a ces conditions d'un infinité de manières differentes, de sorte que les petits déplacements auxquels sont assujetties les molécules sont dans un certaine mesure arbitraires et peuvent varier d'une infinité de manieres. On peut donc en conclure que ces petites variations de position des molécules pendant la rotation du corps ne peuvent pas influencer le resultat définitif et que par consequent la partie de Λ, relativement a laquelle ces suppositions sont valables est nulle.

Fig. 4.



Dans le second cas les points (x, y, z) et (x'', y'', z'') sont situés dans la même molécule. Dans la fig. 4 les points O, P, O', P' sont ceux de la fig. 3 et sont determinés de la même manière. De plus le point P'' a pour coordonnees x'', y'', z'' et est déterminé par des coordonnees spheriques de la même manière que P, c'est-à-dire par OP'' δ''

et par les angles θ'' et ω''; de plus on pose $O'P''= r_1'$, la direction de cette ligne étant déterminée par les angles θ_1' et ω_1', et $P'P''= r'$. Les directions positives des deux dernières lignes sont estimées de O' et de P' à P''. Par conséquent il faut ou ajouter 180° aux angles que font ces lignes avec l'axe des x, si l'on veut que le sens positif soit estimé de P'' à O' et à P', ou changer le signe de r'. Nous estimerons dans ce qui suit le sens positif à partir de P'' et pour cette raison nous poserons, après avoir changé de signe,

$$X_1' = \frac{1}{4\pi}\int^{(e)}\frac{dv''}{r'}\Delta''X''.$$

Après avoir légèrement transformé l'expression ci-dessus de X_3, on trouve

$$X_3 = -\frac{1}{(4\pi)^2}\int dv''\Delta''X''\int^{(e)}dv'\psi'\left[\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial x''}\frac{1}{r\,r'}+\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial y''}\frac{1}{r\,r'}+\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial z''}\frac{1}{r\,r'}\right],$$

où r ne dépend pas de x'', y'', z'' ni r' de x, y, z.

Par une rotation de la seconde molécule autour de O', r et r' varieront seuls dans cette expression, et on trouvera comme moyenne pour toutes les positions* * NOTE 20.

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\sin\theta' d\theta'\int_0^{2\pi}d\omega'\frac{1}{r\,r'} = \frac{1}{r_1 r_1'}+\frac{\delta'^2\cos\gamma_1}{3\,r_1^2 r_1'^2}+\frac{\delta'^4(3\cos^2\gamma_1-1)}{10\,r_1^3 r_1'^3}+\dots$$

où

$$r = \sqrt{r_1^2+\delta'^2-2r_1\delta'(\cos\theta_1\cos\theta'+\sin\theta_1\sin\theta'\cos(\omega_1-\omega'))},$$

$$r' = \sqrt{r_1'^2+\delta'^2-2r_1'\delta'(\cos\theta_1'\cos\theta'+\sin\theta_1'\sin\theta'\cos(\omega_1'-\omega'))}$$

et

$$\cos\gamma_1 = \cos\theta_1\cos\theta_1'+\sin\theta_1\sin\theta_1'\cos(\omega_1-\omega_1').$$

Si nous nous servons pour abréger d'une notation symbolique, en désignant par $\Delta_{\prime\prime}$ l'opération

$$\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial x''}+\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial y''}+\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial z''},$$

si de plus au lieu de $\Delta_{\prime\prime}\,\Delta_{\prime\prime}$ nous écrivons $\Delta^2_{\prime\prime}$, etc., et si nous faisons observer que

$$r_1\cos\theta_1 = x_0 - x,\quad r_1'\cos\theta' = x_0 - x'',$$
$$r_1\sin\theta_1\cos\omega_1 = y_0 - y,\ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

nous pourrons donner à la série bien comme ci-dessus

* NOTE 21. la forme assez remarquable*

$$\left[1+\frac{2\delta''^2\Delta_{\prime\prime}}{1\cdot2\cdot3}+\frac{2\delta''^4\Delta^2_{\prime\prime}}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}+\ldots\right]\frac{1}{r_1r_1'}.$$

Si dans X_3 l'on remplace $\frac{1}{r\,r'}$ par cette expression, on trouvera

$$X_3 = \frac{1}{(4\pi)^2}\int d\sigma''\Delta''X'''\int^{(\sigma)} d\sigma'\varphi'\left[\Delta_{\prime\prime}+\frac{2\delta''^2\Delta^2_{\prime\prime}}{1\cdot2\cdot3}+\ldots\right]\frac{1}{r_1r_1'}.$$

Si l'on fait tourner le corps autour de O, pendant que la première molécule reste immobile, on trouve comme moyenne de $\frac{1}{r_1r_1'}$ pour toutes les positions

$$\frac{1}{4\pi}\int\sin\theta_0\,d\theta_0\int_0^{2\pi}d\omega_0\,\frac{1}{r_1r_1'} = \frac{1}{r_0^2}+\frac{\delta\delta''\cos\gamma}{3r_0^4}+\frac{\delta^2\delta''^2(3\cos^2\gamma-1)}{10r_0^6}+\ldots$$

où

$$r_1 = \sqrt{r_0^2+\delta^2-2r_0\delta(\cos\theta_0\cos\theta+\sin\theta_0\sin\theta\cos(\omega_0-\omega))},$$
$$r_1' = \sqrt{r_0^2+\delta''^2-2r_0\delta''(\cos\theta_0\cos\theta''+\sin\theta_0\sin\theta''\cos(\omega_0-\omega''))},$$
$$\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta''+\sin\theta\sin\theta''\cos(\omega-\omega'').$$

Si nous remarquons que l'on a

$$\delta\delta''\cos\gamma = x x''+y y''+z z'',$$
$$\delta^2 = x^2+y^2+z^2,\quad \delta''^2 = x''^2+y''^2+z''^2,$$

on peut aisément appliquer à cette série les opérations $\Delta_{\prime\prime}$, $\Delta_{\prime\prime}^2$, etc., et on obtiendra des séries analogues, pour lesquelles on peut déduire une loi simple. Nous n'insisterons pourtant pas sur ce point, mais nous bornerons les calculs aux premiers termes. Si dans l'expression de X_3 nous remplaçons $\frac{1}{r_1 r'_1}$ par la série, et si nous négligeons toute les puissances de $\frac{1}{r_0}$ supérieures à la sixième, nous obtiendrons

$$X_3 = -\frac{1}{(4\pi)^2}\int dv''\,\Delta'' X''\int^{(e)} dv'\psi'\left(\frac{1}{r_0^4} + 2\frac{xx''+yy''+zz''+\delta'^2}{r_0^6}\right),$$

d'où il suit que

$$\int dv\,\psi\,\frac{\partial X_3}{\partial x} = -\frac{1}{8\pi^2}\int dv\,\psi\int dv'' X''\cdot x''\int^{(e)}\frac{dv'\psi'}{r_0^6}.$$

Si en vertu de la première équation (15) l'on pose dans l'intégrale $\int dv''\,\Delta'' X''\cdot x''$

$$\Delta'' X'' = -\left[\frac{\partial}{\partial x''}\psi''\left(\frac{\partial X''}{\partial x''}+1\right) + \frac{\partial}{\partial y''}\psi''\frac{\partial Y''}{\partial y''} + \frac{\partial}{\partial z''}\psi''\frac{\partial Z''}{\partial z''}\right],$$

on trouvera, en intégrant par parties, comme ψ'' s'évanouit à la limite, que cette intégrale peut s'écrire sous la forme

$$\int dv''\psi''\left(\frac{\partial X''}{\partial x''}+1\right),$$

expression qui prendra la valeur

$$\int dv''\psi''\left(1+\frac{1}{3}\left(\frac{\partial A''}{\partial a''}+\frac{\partial B''}{\partial b''}+\frac{\partial C''}{\partial c''}\right)\right),$$

quand on fera tourner la première molécule, ce qu'on déduit par le même procédé qu'on a appliqué à l'équation (17).

$$\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial x''}+\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial y''}+\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial z''},$$

si de plus au lieu de $\Delta_{\prime\prime}\Delta_{\prime\prime}$ nous écrivons $\Delta^2_{\prime\prime}$, etc., et si nous faisons observer que

$$r_1\cos\theta_1 = x_0 - x\,,\quad r_1'\cos\theta' = x_0 - x'',$$
$$r_1\sin\theta_1\cos\omega_1 = y_0 - y\,,\quad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

nous pourrons donner à la série bien connue ci-dessus

* NOTE 21. la forme assez remarquable*

$$\left[1+\frac{2\delta''^2\Delta_{\prime\prime}}{1\cdot2\cdot3}+\frac{2^2\delta''^4\Delta^2_{\prime\prime}}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}+\ldots\right]\frac{1}{r_1 r_1'}.$$

Si dans X_3 l'on remplace $\frac{1}{r\,r'}$ par cette expression, on trouvera

$$X_3 = -\frac{1}{(4\pi)^2}\int dv''\,\Delta''X''\int^{(e)}dv'\psi'\left[\Delta_{\prime\prime}+\frac{2\delta''^2\Delta^2_{\prime\prime}}{1\cdot2\cdot3}+\ldots\right]\frac{1}{r_1 r_1'}.$$

Si l'on fait tourner le corps autour de O, pendant que la première molécule reste immobile, on trouve comme moyenne de $\frac{1}{r_1 r_1'}$ pour toutes les positions

$$\frac{1}{4\pi}\int\sin\theta_0\,d\theta_0\int_0^{2\pi}d\omega_0\frac{1}{r_1 r_1'} = \frac{1}{r_0^2}+\frac{\delta\delta''\cos\gamma}{3r_0^4}+\frac{\delta^2\delta''^2(3\cos^2\gamma-1)}{10\,r_0^6}+\ldots$$

où

$$r = \sqrt{r_0^2+\delta^2-2r_0\delta\,(\cos\theta_0\cos\theta+\sin\theta_0\sin\theta\cos(\omega_0-\omega))},$$
$$r_1' = \sqrt{r_0^2+\delta''^2-2r_0\delta''\,(\cos\theta_0\cos\theta''+\sin\theta_0\sin\theta''\cos(\omega_0-\omega''))},$$
$$\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta''+\sin\theta\sin\theta''\cos(\omega-\omega'').$$

Si nous remarquons que l'on a

$$\delta\delta''\cos\gamma = x\,x''+y\,y''+z\,z'',$$
$$\delta^2 = x^2+y^2+z^2,\quad \delta''^2 = x''^2+y''^2+z''^2,$$

on peut aisément appliquer à cette série les opérations $\Delta_{\prime\prime}$, $\Delta_{\prime\prime}^2$, etc., et on obtiendra des séries analogues, pour lesquelles on peut déduire une loi simple. Nous n'insisterons pourtant pas sur ce point, mais nous bornerons les calculs aux premiers termes. Si dans l'expression de X_3 nous remplaçons $\frac{1}{r_1 r'_1}$ par la série, et si nous négligeons toute les puissances de $\frac{1}{r_0}$ supérieures à la sixième, nous obtiendrons

$$X_3 = -\frac{1}{(4\pi)^2}\int dv''\,\Delta''X''\int^{(e)} dv'\psi'\left(\frac{1}{r_0^4} + 2\,\frac{xx''+yy''+zz''+\delta'^2}{r_0^6}\right),$$

d'où il suit que

$$\int dv\,\psi\,\frac{\partial X_3}{\partial x} = -\frac{1}{8\pi^2}\int dv\,\psi\int dv''X''\cdot x''\int^{(e)}\frac{dv'\,\psi'}{r_0^6}.$$

Si en vertu de la première équation (15) l'on pose dans l'intégrale $\int dv''\Delta''X''\cdot x''$

$$\Delta''X'' = -\left[\frac{\partial}{\partial x''}\psi''\left(\frac{\partial X''}{\partial x''}+1\right)+\frac{\partial}{\partial y''}\psi''\frac{\partial Y''}{\partial y''}+\frac{\partial}{\partial z''}\psi''\frac{\partial Z''}{\partial z''}\right],$$

on trouvera, en intégrant par parties, comme ψ'' s'évanouit à la limite, que cette intégrale peut s'écrire sous la forme

$$\int dv''\psi''\left(\frac{\partial X''}{\partial x''}+1\right),$$

expression qui prendra la valeur

$$\int dv''\psi''\left(1+\frac{1}{3}\left(\frac{\partial A''}{\partial a''}+\frac{\partial B''}{\partial b''}+\frac{\partial C''}{\partial c''}\right)\right),$$

quand on fera tourner la première molécule, ce qu'on déduit par le même procédé qu'on a appliqué à l'équation (17).

Comme les éléments de cette intégrale appartiennent à la même molécule que ceux de l'integrale $\int dr\varphi$, nous négligerons les accents, et nous obtiendrons alors

$$\int dv\varphi\frac{\partial X_3}{\partial x} = -\frac{1}{8\pi^2}\int dr\varphi\left(1+\frac{1}{3}\left(\frac{\partial A}{\partial a}+\frac{\partial B}{\partial b}+\frac{\partial C}{\partial c}\right)\right)\int dr\varphi\int\frac{dr'\varphi'}{r_0^n}. \quad (20)$$

Si nous nous bornons à cette approximation et si nous introduisons dans l'équation (14) les résultats obtenus, cette équation donnera, si nous designons par A l'indice de réfraction réduit du corps isotrope considéré

$$\frac{A^2-1}{A^2+2}v = \frac{1}{3}\int dr\varphi\left(1+\frac{1}{3}\left(\frac{\partial A}{\partial a}+\frac{\partial B}{\partial b}+\frac{\partial C}{\partial c}\right)\right)\left[1-\frac{1}{8\pi^2}\int dr\varphi\int\frac{dr'\varphi'}{r_0^n}\right]. \quad (B)$$

Si le corps est composé uniquement de molécules de la même nature, dont chacune peut toutefois être composée de plusieurs atomes dont la combinaison est invariable, et si l'on pose

$$\int dv\varphi = \nu, \quad \int dr\varphi\left(1+\frac{1}{3}\left(\frac{\partial A}{\partial a}+\frac{\partial B}{\partial b}+\frac{\partial C}{\partial c}\right)\right) = \mu,$$

les intégrations ne s'étendant qu'à une seule molecule ou à la molécule composée (si elle est composée), nous obtiendrons, en appelant s le nombre de ces molécules,

$$\frac{A^2-1}{A^2+2}v = \tfrac{1}{3}\mu s\left(1-\frac{\nu^1}{8\pi^2}\Sigma\frac{1}{r_0^n}\right).$$

Ici r_0 désigne la distance du point central d'une molécule arbitraire prise à l'intérieur du corps au point central de chacune des autres molécules, et Σ est alors la somme correspondante à toutes ces valeurs de r_0. Pour cette raison $\Sigma\frac{1}{r_0^n}$ est inversement proportionnel au carré du volume du corps, et cette somme peut être

déterminée plus exactement si l'on suppose que les molécules sont distribuées d'une manière donnée. Si nous supposons par exemple, pour rendre ceci plus intelligible, que les molécules sont situées dans les angles des cubes congruents, dont le côté, égal à la plus petite distance des molécules, a pour valeur R, et si nous posons

$$\Sigma \frac{1}{(m^2+n^2+p^2)^3} = \alpha^2,$$

où Σ est la somme étendue à toutes les valeurs entières de m, n, p de $-\infty$ à $+\infty$, $m = n = p = 0$ seul excepté, on aura

$$\Sigma \frac{1}{r_0^6} = \frac{\alpha^2}{R^6} \quad \text{et} \quad v = sR^3 *,$$ * NOTE 22.

et par conséquent

$$\Sigma \frac{1}{r_0^6} = \frac{\alpha^2 s^2}{v^2}.$$

Pour une autre distribution des molécules, c'est seulement α qui variera.

Si nous posons

$$\tfrac{1}{3}\mu s = P, \quad \frac{\alpha^2 \nu^2 s^2}{8\pi^2} = a^2,$$

l'équation ci-dessus qui donne l'indice de réfraction devient

$$\frac{A^2-1}{A^2+2} v = P\left(1 - \frac{a^2}{v^2}\right),$$

où P et a^2 sont deux constantes positives et indépendantes de la température et du volume du corps, et où l'on peut supposer que v est le volume de l'unité de poids du corps. Pour des vapeurs et des gaz cette

équation se réduira avec une assez grande approximation à

* NOTE 23. $$\frac{2}{3}(A-1)v = P.^*$$

Si les molécules du corps sont composées de plusieurs atomes qui ne sont pas liés d'une manière invariable, ou si les indices moléculaires de réfraction eux-mêmes dépendent de la température et du volume, l'équation (B) sera encore admissible, mais on reconnaît alors qu'elle n'aura aucune importance pratique, tant qu'on ne connaîtra pas les lois auxquelles sont assujetties ces variations.

Si le corps est un mélange de plusieurs autres, et si nous cherchons à déterminer l'indice de réfraction du mélange par ceux des éléments, il faut, même en conservant l'idée de l'invariabilité des molécules, qu'on fasse encore une hypothèse, par la raison que nous ne connaissons pas la position mutuelle des différentes molécules. Nous supposerons ici que la distribution des molécules est la même dans le mélange que dans chaque élément en particulier. Si l'on suppose par exemple que les molécules des éléments du mélange sont situées dans les angles de cubes congruents, on fera la même hypothèse sur le mélange, et les différentes molécules seront distribuées accidentellement dans les angles.

Si le mélange est composé de deux sortes de molécules, et si leurs nombres respectifs dans l'unité de poids du corps sont s_1 et s_2, si ν_1 et ν_2, μ_1 et μ_2 sont les quantités correspondantes à μ et à ν pour les deux sortes de molécules, on obtiendra par l'équation (B)

$$\frac{A^2-1}{A^2+2}v = \frac{1}{3}s_1\mu_1 + \frac{1}{3}s_2\mu_2 - \frac{\alpha^2}{8\pi^2R^6}\left(\frac{1}{3}s_1\mu_1\nu_1 + \frac{1}{3}s_2\mu_2\nu_2\right)\frac{s_1\nu_1+s_2\nu_2}{s_1+s_2}.$$

Nous poserons ici

$$R^3(s_1+s_2) = v, \quad \tfrac{1}{3}s_1\mu_1 = p_1P_1, \quad \tfrac{1}{3}s_2\mu_2 = p_2P_2,$$

$$\frac{\alpha^2}{8\pi^2}\nu_1^2 s_1^2 = p_1^2 a_1^2, \quad \frac{\alpha^2}{8\pi^2}\nu_2^2 s_2^2 = p_2^2 a_2^2,$$

où p_1 et p_2 sont les rapports des poids des deux éléments, et $p_1+p_2 = 1$, tandis que P_1 et a_1, P_2 et a_2 sont des constantes correspondant à P et a pour les deux éléments. De plus soient E_1 et E_2 les poids relatifs des deux éléments; cela veut dire que ces deux nombres sont, d'après la théorie chimique, les poids atomiques des éléments; on obtiendra

$$\frac{s_1E_1}{s_2E_2} = \frac{p_1}{p_2}.$$

En introduisant ces notations, on trouvera la relation

$$\frac{A^2-1}{A^2+2}v = p_1P_1 + p_2P_2$$
$$-\frac{1}{v^2}(p_1a_1+p_2a_2)\left(\frac{p_1}{E_1}+\frac{p_2}{E_2}\right)(p_1P_1E_1a_1+p_2P_2E_2a_2), \qquad (D)$$

dont la forme est toujours la même que celle de l'équation (C). On formera aisément les expressions correspondantes pour les mélanges de plus de deux corps.

Ce résultat est remarquable par la circonstance que les équivalents chimiques y entrent, de manière qu'on peut aussi par cette voie déterminer ces équivalents quand on a avec une précision suffisante déterminé les deux constantes de l'équation par des expériences portant sur les substances composantes et sur le mélange, en se servant de l'équation (C). Si le mélange se transforme en une combinaison chimique, on ne pourra pas déduire la formule de l'indice de réfraction sans faire

de nouvelles hypothèses. C'est pourquoi je n'insisterai pas sur ce problème.

La preuve de la valeur des résultats obtenus doit principalement être déduite des expériences sur les indices de réfraction des corps dans leurs différents états moléculaires. Si l'on ne connaît par exemple l'indice de réfraction d'un corps qu'à l'état liquide et à l'état gazeux, il faut encore déterminer pour le premier état les deux constantes qui entrent dans l'équation (C), et pour cette raison il ne reste que peu d'expériences dont on puisse se servir pour notre but. Ce sont seulement les expériences sur l'eau et sur le sulfure de carbone à l'état liquide et à l'état gazeux qui peuvent être considérées comme démonstratives.

Relativement à ces deux corps, on connaît l'indice de réfraction réduit A et $\frac{\partial A}{\partial v}$ pour l'état liquide, et on peut alors, en se servant de ces deux quantités, déterminer les deux constantes de l'équation (C). On déduira de cette équation

$$P = \tfrac{3}{2}\frac{A^2-1}{A^2+2}v + \frac{3A}{(A^2+2)^2}v^2\frac{\partial A}{\partial v},$$

$$a^2P = \tfrac{1}{2}\frac{A^2-1}{A^2+2}v^3 + \frac{3A}{A^2+2}v^4\frac{\partial A}{\partial v},$$

et on peut écrire $v = \frac{1}{D}$, $v^2\frac{\partial A}{\partial v} = -\frac{\partial A}{\partial D}$, D étant le poids spécifique. Pour l'eau à 4° C., on trouve au moyen de l'équation (C') de la première partie du mémoire

$$A = 1{,}32194;$$

de plus, à cette température, v est égal à 1, et en vertu de I (11)

$$\frac{\partial A}{\partial v} = -0{,}2976.$$

On en déduit

$$P = 0{,}21517, \quad a^2 = 0{,}07296.$$

Pour la vapeur d'eau l'indice de réfraction A est déterminé par

$$A = 1 + \frac{3P}{2v} = 1{,}0002597.$$

Pour la lumière blanche Jamin a trouvé l'indice de réfraction égal à

$$1{,}000261,$$

nombre qui concorde assez bien avec ce qu'on a trouvé ci-dessus, si on le diminue un peu à cause de la dispersion.

Pour le sulfure de carbone à 20° C. Wüllner a trouvé

$$A = 1{,}586424, \quad D = 1{,}26354, \quad \frac{\partial A}{\partial t} = -0{,}0007539,$$
$$\frac{\partial D}{\partial t} = -0{,}001506.$$

On en déduit

$$P = 0{,}28186, \quad a^2 = 0{,}03578.$$

Si nous supposons, comme l'a fait Dulong, que le poids spécifique de la vapeur de sulfure de carbone est 2,644 par rapport à l'air atmosphérique, on peut calculer son indice de réfraction

$$A = 1 + \frac{3P}{2v} = 1{,}001445.*$$

* NOTE 24.

Dulong a pour la lumière blanche trouvé l'indice de réfraction

$$0{,}00150,$$

qui de même concorde assez bien avec la valeur calculée, car la correction relative à la dispersion doit ici être beaucoup plus considérable que pour la vapeur d'eau.

On en peut déduire un nouveau contrôle pour l'admissibilité de la théorie, à savoir que la valeur calculée de la constante a^2 doit toujours être positive, aussi bien pour un corps simple que pour un corps composé.

En général j'ai trouvé cette condition vérifiée, en particulier par le calcul des expériences, qui donnent une détermination assez exacte de cette constante, comme les expériences sur les indices de réfraction des corps et sur leurs poids spécifiques tant à l'état gazeux qu'à l'état solide ou liquide, et je puis expressément faire observer que le soufre, le phosphore et l'arsenic ne font pas exception. Les nombres très petits que M. Schrauff a donnés dans différents mémoires pour le pouvoir réfringent de ces corps à l'état gazeux proviennent d'une simple méprise, car il se sert par erreur de leur poids spécifique calculé à 0° et à une pression de 760^{mm}, tandis que leurs indices de réfraction ont été déterminés par Leroux au point d'ébullition. Leroux aussi s'est servi de la même détermination du poids spécifique, mais seulement pour faire la comparaison mutuelle du pouvoir réfringent des vapeurs de ces corps.

NOTES.

NOTE 1. Un résumé du mémoire se trouve dans les Wiedemann Ann., t. XI, p. 70—103. Voir le supplément au mémoire suivant.

NOTE 2. Le tableau de la p. 234 donne $\varDelta = 3{,}45$, ce qui est aussi en meilleure concordance avec $\frac{s}{\varDelta} = 50{,}88$, car si l'on pose $\varDelta = 3{,}47$, on trouvera $\frac{s}{\varDelta} = 50{,}52$.

NOTE 3. L'explication du phénomène donnée par Lorenz n'est pas suffisamment claire. Si l'on suppose que les franges jaunes aussi bien que les franges rouges sont équidistantes, on verra que la position de l'un des systèmes par rapport à l'autre ne sera pas changée s'ils se déplacent tous deux d'une frange en même temps. Si au contraire le système rouge est en retard sur le système jaune, la position de l'un des systèmes variera relativement à l'autre. Une frange rouge étant centrale, on voit que la frange rouge suivante a dépassé d'un huitième le milieu de deux franges jaunes, puis la suivante de deux huitièmes, et ainsi de suite. Par conséquent, si par le déplacement d'une frange jaune le mouvement du système rouge est en retard sur le système jaune d'un huitième, la première frange rouge suivante deviendra centrale par le déplacement d'une frange jaune,

la seconde s'il est en retard de deux huitièmes, et ainsi de suite.

NOTE 4. Le rapport 27:32 ne concorde pas avec le rapport 44,24:51,16, le dernier étant à peu près égal à 27,7:32.

NOTE 5. λ_{Na} et λ_{Li} désignent les longueurs d'onde dans l'air, et on suppose ici qu'elles sont indépendantes de la température.

NOTE 6. On reconnaît, en comparant les formules, que l'écart est 0,014 ou à peu près $\frac{1}{70}$.

NOTE 7. En développant les expressions suivant les puissances décroissantes de x.

NOTE 8. On suppose ici que la longueur d'onde est infiniment grande du premier ordre en comparaison des périodes des fonctions ξ_1, ξ_2, etc., et que par suite l, m, n sont infiniment petits du premier ordre et de plus que k est du même ordre que l, m, n.

NOTE 9. On voit immédiatement que

$$\frac{\partial \xi_2}{\partial y} - \frac{\partial \eta_2}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad \frac{\partial \eta_2}{\partial z} - \frac{\partial \zeta_2}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

$$\frac{\partial \xi_2}{\partial x} - \frac{\partial \xi_1}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

où φ est une fonction périodique. En différentiant ces équations par rapport à z, x, y et en additionnant, on obtient

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \tag{A}$$

Mais φ étant développé en série de Fourier, on peut écrire

$$\varphi = \Sigma A_p \cos(l_p x + m_p y + n_p z + d_p),$$

et en vertu de l'équation (Δ) (si nous supposons que cette série peut être différentiée terme à terme)

$$A_p(l_p^2 + m_p^2 + n_p^2) = 0,$$

et par conséquent $A_p = 0$. φ est donc identiquement égal à zéro, d'où il suit que

$$\xi_2 = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad \eta_2 = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad \zeta_2 = \frac{\partial F}{\partial z}.$$

NOTE 10. Dans ce qui suit il faut remarquer que le dénominateur r est une constante.

NOTE 11. On obtient l'expression (11) en regardant l'équation (7) comme une équation de Poisson, où la densité en un point (x, y, z) est

$$\frac{1}{4\pi}\left[\frac{\partial}{\partial x}\psi\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}+1\right)+\frac{\partial}{\partial y}\psi\frac{\partial \varphi}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}\psi\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right]$$

et en intégrant par parties.

NOTE 12. Ici s'est glissée une faute, qui pourtant n'influe pas sur les résultats suivants.

On peut considérer

$$\int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\omega \frac{3\cos^2\theta - 1}{r}$$

où

$$r = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho'(\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\omega-\omega'))}$$

comme une intégrale superficielle étendue à toute la surface d'une sphère dont le rayon est l'unité et où $\sin\theta\, d\theta\, d\omega$

est un élément de la surface; r est la distance de deux points dont les coordonnées polaires sont ρ, θ, ω, ρ', θ', ω'. Mais le système de coordonnées peut etre transformé de manière qu'on prenne pour l'axe fixe la ligne ρ' et comme plan fixe le plan des ρ' et de l'axe des x primitif.

Si l'on désigne par μ l'angle que fait ρ avec ρ', par ω_1 l'angle que fait le plan des $\rho\rho'$ avec le plan des $x\rho'$, le nouvel élément de surface sera

$$\sin\mu\, d\mu\, d\omega_1.$$

De plus on aura

$$r = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho'\cos\mu}$$

et

$$\cos\theta = \cos\mu\cos\theta' + \sin\mu\sin\theta'\cos\omega_1.$$

Par suite on obtiendra

$$\int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\omega\, \frac{3\cos^2\theta - 1}{r}$$

$$= \int_0^\pi \sin\mu\, d\mu \int_0^{2\pi} d\omega_1 \frac{[3(\cos\mu\cos\theta' + \sin\mu\sin\theta'\cos\omega')^2 - 1]}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho'\cos\mu}}$$

$$= \pi \int_0^\pi \frac{\sin\mu\, d\mu\, (3\cos^2\theta' - 1)(3\cos^2\mu - 1)}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho'\cos\mu}}.$$

Mais si l'on prend $r = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho'\cos\mu}$ pour la variable indépendante, on aura

$$\cos\mu = \frac{-r^2 + \rho^2 + \rho'^2}{2\rho\rho'},$$

$$\sin\mu\, d\mu = \frac{r\, dr}{\rho\rho'}$$

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin\mu\,d\mu\,(3\cos^2\mu-1)}{r}=\frac{1}{\rho\rho'}\int_{|\rho-\rho'|}^{\rho+\rho'}dr\left[\frac{3(\rho^2+\rho'^2-r^2)^2}{4\rho^2\rho'^2}-1\right]$$

où $|\rho-\rho'|$ désigne la valeur absolue de $\rho-\rho'$, r étant une quantité positive.

On obtiendra alors

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin\mu\,d\mu\,(3\cos^2\mu-1)}{\sqrt{\rho^2+\rho'^2-2\rho\rho'\cos\mu}}=\begin{cases}\dfrac{4}{5}\dfrac{\rho'^2}{\rho^3}\\[2mm] \dfrac{4}{5}\dfrac{\rho^2}{\rho'^3}\end{cases}\quad\text{selon que }\rho\gtrless\rho'.$$

Par suite on aura

$$\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta\int_0^{2\pi}d\omega\,\frac{3\cos^2\theta-1}{r}=\begin{cases}\dfrac{4\pi}{5}(3\cos^2\theta'-1)\dfrac{\rho'^2}{\rho^3},\ \rho>\rho'.\\[2mm] \dfrac{4\pi}{5}(3\cos^2\theta'-1)\dfrac{\rho^2}{\rho'^3},\ \rho<\rho'.\end{cases}$$

Nous allons maintenant chercher la valeur de l'intégrale

$$P=\int_0^R\frac{d\rho}{v}\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta\int_0^{2\pi}d\omega\frac{\partial}{\partial\rho}\rho^2\left(\cos^2\theta\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{3\cos^2\theta-1}{\rho}\right)\int_0^{\infty}\rho'^2\,d\rho'\int_0^{\pi}\sin\theta' d\theta'\int_0^{2\pi}d\omega'\frac{f'}{r}.$$

Nous chercherons séparément la valeur des deux termes dont est composé P.

On aura

$$\int_0^R\frac{d\rho}{v}\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta\int_0^{2\pi}d\omega\,\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\rho^2\cos^2\theta\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\int_0^{\infty}\rho'^2d\rho'\int_0^{\pi}\sin\theta'\,d\theta'\int_0^{2\pi}d\omega'\,\frac{f'}{r}\right)\right]$$

$$=\int_0^{\pi}\sin\theta' d\theta'\int_0^{2\pi}d\omega'\int_0^R\frac{d\rho}{v}\,\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\rho^2\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\int_0^{\rho}f'\rho'^2d\rho'+\int_{\rho}^{\infty}f'\rho'^2d\rho'\right)\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta\int_0^{2\pi}\frac{d\omega\cos^2\theta}{r}\right]$$

$$=\int_0^{\pi}\sin\theta'\,d\theta'\int_0^{2\pi}d\omega'\int_0^R\frac{d\rho}{v}\,\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\rho^2\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\int_0^{\rho}f'\rho'^2d\rho'\left(\frac{4\pi}{5}\left(\cos^2\theta'-\frac{1}{3}\right)\frac{\rho'^2}{\rho^3}+\frac{4}{3}\frac{\pi}{\rho}\right)\right)\right]$$

$$+\int_0^\pi \sin\theta' d\theta' \int_0^{2\pi} d\omega' \int_0^R \frac{d\rho}{v} \frac{\partial}{\partial\rho}\left[\rho^2 \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\int_\rho^\infty f'\rho'^2 d\rho' \left(\frac{4\pi}{5}\left(\cos^2\theta' - \frac{1}{3}\right)\frac{\rho^2}{\rho'^3} + \frac{4}{3}\frac{\pi}{\rho'}\right)\right)\right]$$

$$= \int_0^\pi \sin\theta' d\theta' \int_0^{2\pi} d\omega' \int_0^R \frac{d\rho}{v} \frac{\partial}{\partial\rho}\left[2\rho^3 \int_\rho^\infty \frac{f' d\rho' \frac{4\pi}{5}\left(\cos^2\theta' - \frac{1}{3}\right)}{\rho'}\right]$$

$$-\int_0^\pi \sin\theta' d\theta' \int_0^{2\pi} d\omega' \int_0^R \frac{d\rho}{v} \frac{\partial}{\partial\rho}\left[\frac{3}{\rho^2}\int_0^\rho f'\rho'^4 d\rho' \cdot \frac{4\pi}{5}\left(\cos^2\theta' - \frac{1}{3}\right) + \frac{4}{3}\pi \int_0^\rho f'\rho'^2 d\rho'\right].$$

Le second terme sera

$$\int_0^R \frac{d\rho}{v} \int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\omega \frac{\partial}{\partial\rho}\left[\rho^2 \frac{3\cos^2\theta - 1}{\rho} \int_0^\infty \rho'^2 d\rho' \int_0^\pi \sin\theta'\, d\theta' \int_0^{2\pi} \frac{d\omega' f'}{r}\right]$$

$$= \int_0^\pi \sin\theta' d\theta' \int_0^{2\pi} d\omega' \int_0^R \frac{d\rho}{v} \frac{\partial}{\partial\rho}\left[\rho\left(\int_0^\rho \rho'^2 f' d\rho' + \int_\rho^\infty \rho'^2 f' d\rho'\right) \cdot \left(\int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\omega \frac{3\cos^2\theta - 1}{r}\right)\right]$$

$$= \int_0^\pi \sin\theta' d\theta' \int_0^{2\pi} d\omega' \int_0^R \frac{d\rho}{v} \frac{\partial}{\partial\rho}\left[\rho \int_0^\rho \rho'^2 f' d\rho' \cdot \frac{4}{5}\pi\, (3\cos^2\theta' - 1)\frac{\rho'^2}{\rho^3}\right]$$

$$+ \int_0^\pi \sin\theta' d\theta' \int_0^{2\pi} d\omega' \int_0^R \frac{d\rho}{v} \frac{\partial}{\partial\rho}\left[\rho \int_\rho^\infty \rho'^2 f' d\rho' \cdot \frac{4}{5}\pi\, (3\cos^2\theta' - 1)\frac{\rho^2}{\rho'^3}\right]$$

$$= \int_0^\pi \sin\theta' d\theta' \int_0^{2\pi} d\omega' \int_0^R \frac{d\rho}{v} \frac{\partial}{\partial\rho}\left[\frac{3}{\rho^2}\int_0^\rho \rho'^4 f' d\rho' \cdot \frac{4}{5}\pi\left(\cos^2\theta' - \frac{1}{3}\right)\right]$$

$$+ \int_0^\pi \sin\theta' d\theta' \int_0^{2\pi} d\omega' \int_0^R \frac{d\rho}{v} \frac{\partial}{\partial\rho}\left[3\rho^3 \int_\rho^\infty \frac{1}{\rho'} f' d\rho' \cdot \frac{4}{5}\pi\left(\cos^2\theta' - \frac{1}{3}\right)\right].$$

En additionnant ces expressions, on trouvera

$$P = \pi \int_0^\pi \sin\theta' d\theta' \int_0^{2\pi} d\omega' \int_0^R \frac{d\rho}{v} \frac{\partial}{\partial\rho}\left[-\frac{4}{3}\int_0^\rho f'\rho'^2 d\rho' + 4\left(\cos^2\theta' - \frac{1}{3}\right)\rho^3 \int_\rho^\infty \frac{d\rho'}{\rho'} f'\right].$$

Le dernier terme diffère de celui de Lorenz; mais comme il s'évanouit quand R est choisi suffisamment grand, il n'influera pas sur le résultat.

NOTE 13. Si l'on introduit les coordonnées sphériques, on aura

$$x = \rho \cos\theta,$$
$$y = \rho \sin\theta \sin\omega,$$
$$z = \rho \sin\theta \cos\omega$$

et

$$\frac{\partial}{\partial y} = \sin\theta \sin\omega \frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\cos\theta\sin\omega\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\rho}\frac{\cos\omega}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\omega},$$

et par conséquent la partie de l'intégrale (12) correspondante au terme $\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int\frac{dv'}{r}\psi'\frac{\partial\varphi'}{\partial y'}$ sera, si l'on pose $\frac{1}{4\pi}\psi'\frac{\partial\varphi'}{\partial y'} = f'_2$,

$$Q = \int_0^R\frac{d\rho}{v}\int_0^\pi\cos\theta\, d\theta\int_0^{2\pi}d\omega\,\frac{\partial}{\partial\rho}\rho^2\left[\sin^2\theta\sin\omega\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\sin\theta\cos\theta\sin\omega\frac{\partial}{\partial\theta}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\rho}\cos\omega\frac{\partial}{\partial\omega}\right]\int_0^\infty\rho'^2 d\rho'\int_0^\pi\sin\theta' d\theta'\int_0^{2\pi}\frac{d\omega'}{r}f'_2.$$

En intégrant par parties les deux derniers termes par rapport à θ et à ω, on aura

$$Q = \int_0^R\frac{d\rho}{v}\int_0^\pi\sin\theta\, d\theta\int_0^{2\pi}d\omega\,\frac{\partial}{\partial\rho}\rho^2\left[\sin\theta\cos\theta\sin\omega\frac{\partial}{\partial\rho}\right.$$
$$\left.+\frac{3}{\rho}\sin\theta\cos\theta\sin\omega\right]\int_0^\infty\rho'^2 d\rho'\int_0^\pi\sin\theta' d\theta'\int_0^{2\pi}\frac{d\omega f'_2}{r}$$
$$= \int_0^R\frac{d\rho}{v}\int_0^\pi\sin\theta\, d\theta\int_0^\pi d\omega\sin\theta\cos\theta\sin\omega\,\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\rho^3\int_0^\infty\rho'^2 d\rho'\int_0^\pi\sin\theta' d\theta'\int_0^{2\pi}\frac{d\omega' f'_2}{r}\right].$$

A présent il faut développer

$$\int_0^\pi\sin\theta\, d\theta\int_0^{2\pi}\frac{d\omega\sin\theta\cos\theta\sin\omega}{r}.$$

Par un procédé analogue à celui qu'on a appliqué précédemment pour chercher la valeur de

$$\int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\omega \frac{3\cos^2\theta - 1}{r},$$

on trouve que la valeur de l'intégrale est

$$\frac{4}{5}\pi \sin\theta' \cos\theta' \sin\omega' \frac{\rho'^2}{\rho^3} \quad \text{pour} \quad \rho > \rho',$$

$$\frac{4}{5}\pi \sin\theta' \cos\theta' \sin\omega' \frac{\rho^2}{\rho'^3} \quad \text{pour} \quad \rho < \rho',$$

et par suite

$$Q = \frac{4}{5}\pi \int_0^\pi \sin^2\theta' \cos\theta' \int_0^{2\pi} \sin\omega'\, d\omega' \int_0^R \frac{d\rho}{r} \frac{\partial}{\partial\rho} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial\rho} \left[\int_0^\rho \rho'^4 f_2'' d\rho' + \rho^5 \int_\rho^\infty \frac{f_2''}{\rho'} d\rho' \right].$$

Mais

$$\int_0^R \frac{d\rho}{r} \frac{\partial}{\partial\rho} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial\rho} \left[\int_0^\rho \rho'^4 f_2'' + \rho^5 \int_\rho^\infty \frac{f_2''}{\rho'} d\rho' \right] = \frac{5 R^3}{r} \int_R^\infty \frac{f_2''}{\rho'} d\rho'.$$

Or cette expression s'évanouit si R croît indéfiniment, et par conséquent on a $Q = 0$. De la même manière on reconnaît que la partie de l'intégrale (12) qui correspond au troisième terme de (11) est nulle.

NOTE 14. Voir le supplément au mémoire suivant.

NOTE 15. Les équations (15) expriment simplement qu'on peut aisément former une fonction $X + X_1 + X_2 + \ldots$ qui satisfait à l'équation précédente, pourvu qu'on sache former une fonction satisfaisant à la première équation (15). On voit aisément que les fonctions X_4 et X_5 sont formées en remplaçant, dans les expressions de X_2 et X_3, X_1'' par X_2'', etc.

NOTE **16**. Les angles en question ne déterminent que la position de l'axe des x, mais non la position de la molécule.

NOTE **17**. Les opérations

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z}$$

et

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

sont indépendantes de la direction du système de coordonnées, pourvu qu'il soit rectangulaire.

NOTE **18**. On ne sait pas si l'on peut en réalité trouver un tel point.

NOTE **19**. On ne peut pas choisir la position du système de coordonnées de la manière indiquée dans le texte; car on introduit de cette manière une nouvelle hypothèse sur la disposition des molécules.

On doit donc dans l'expression

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^\pi \sin\theta'\,d\theta'\int_0^{2\pi}\frac{d\omega'}{r}\,\Delta' X'$$

remplacer $\Delta' X'$ par la moyenne de toutes les valeurs qu'on obtient en faisant tourner la molécule autour de la ligne $O'P'$, c'est-à-dire qu'on doit remplacer $\Delta' X'$ par $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Delta' X' d\omega''$, ω'' étant l'angle que fait le plan $(a'b')$ avec le plan des (xy). De cette manière on obtient

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\omega''\,\Delta' X' = \Delta' A' \cos\theta'$$

en vertu de l'équation

$$X' = A' \cos \theta' + B' \sin \theta' \cos \omega'' + C' \sin \theta' \sin \omega'' ,$$

et la moyenne de $\frac{1}{r} \varDelta' X'$ pour toutes les positions de la molécule sera

$$\frac{1}{8\pi^2} \int_0^{\pi} \sin \theta' d\theta' \int_0^{2\pi} \frac{d\omega'}{r} \int_0^{2\pi} \varDelta' X' d\omega'' = \frac{\delta'}{3 r_1^2} \varDelta' A' \cos \theta_1 .$$

De plus on a remplacé X_1 par sa moyenne au lieu de chercher la moyenne de $\frac{\partial X_1}{\partial x}$.

NOTE **20**. On obtient l'expression qui suit en développant comme à l'ordinaire en une série de fonctions sphériques.

Si la fonction sphérique P_n d'ordre n est définie par l'équation

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n} ,$$

l'équation peut s'écrire

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} \sin \theta' d\theta' \int_0^{2\pi} d\omega' \frac{1}{r r'} = \frac{1}{r_1 r_1'} + \frac{\delta'^2 P_1(\cos \gamma')}{3 \cdot r_1^2 r_1'^2} + \frac{\delta'^4 P_2(\cos \gamma')}{5 \cdot r_1^3 r_1'^3} + \dots$$

NOTE **21**. Si l'on pose

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} , \quad r' = \sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2} ,$$

$$\cos \gamma_1 = \frac{x x'' + y y'' + z z''}{r r'} ,$$

on voit immédiatement que

$$\varDelta_{''} \frac{1}{r r'} = \frac{\cos \gamma_1}{r^2 r'^2} = \frac{P_1(\cos \gamma_1)}{r^2 r'^2} ,$$

$$\varDelta_{''}^2 \frac{1}{r r'} = \frac{3(\cos^2 \gamma_1 - 1)}{r^3 r'^3} = \frac{2 \cdot 3 \cdot P_2(\cos \gamma_1)}{r^3 r'^3} .$$

Il faut démontrer que

$$\frac{2^n \Delta_n^n \frac{1}{r r'}}{2n+1!} = \frac{1}{2n+1} \frac{P_n(\cos\gamma_1)}{r^{n+1} r'^{n+1}}.$$

Or, si nous posons

$$z = \frac{f(\cos\gamma_1)}{r^n r'^n}$$

où f est une fonction arbitraire, nous aurons

$$\frac{\left\{ \begin{array}{l} f''(\cos\gamma_1)\cos\gamma_1(\cos^2\gamma_1 - 1) - f'(\cos\gamma_1)(2n(1-\cos^2\gamma_1) - 1 + \cos^2\gamma_1) \\ + n^2 f(\cos\gamma_1)\cos\gamma_1 \end{array} \right\}}{r^{n+1} r'^{n+1}}.$$

Si nous posons

$$f(\cos\gamma_1) = C_{n-1} P_{n-1}(\cos\gamma_1),$$

où C_{n-1} est une constante, nous obtiendrons

$$\Delta_n(z) = \frac{(2n-1)\left[n f(\cos\gamma_1)\cos\gamma_1 - f'(\cos\gamma_1)(1-\cos^2\gamma_1) \right]}{r^{n+1} r'^{n+1}};$$

si nous remarquons qu'alors

$$(1-x^2)f''(x) - 2xf'(x) + n(n-1)f(x) = 0,$$

et si nous nous rappelons que

$$(x^2-1)\frac{dP_{n-1}(x)}{dx} = (n-1)(xP_{n-1}(x) - P_{n-2}(x)),$$

nous aurons

$$= \frac{(2n-1)C_{n-1}\left[(2n-1)P_{n-1}(\cos\gamma_1)\cos\gamma_1 - (n-1)P_{n-2}(\cos\gamma_1)\right]}{r^{n+1} r'^{n+1}}$$

$$= \frac{(2n-1)\, n\, C_{n-1} P_n(\cos\gamma_1)}{r^{n+1} r'^{n+1}}.$$

Si l'on pose

$$C_{n-1} = \frac{2n-2!}{2^{n-1}},$$

on aura

$$\Delta_{\prime\prime} z = C_n \frac{P_n(\cos\gamma_1)}{r^{n+1}\, r'^{n+1}},$$

ce qu'il fallait démontrer.

NOTE **22**. Dans l'équation

$$\Sigma \frac{1}{r_0^6} = \frac{\alpha^2}{R^6},$$

α^2 ne peut pas avoir la valeur indiquée

$$\Sigma \frac{1}{(m^2+n^2+p^2)^3},$$

mais on voit qu'il aura approximativement la valeur constante

$$s\Sigma \frac{1}{(m^2+n^2+p^2)^3}.$$

NOTE **23**. Pour les liquides et les gaz, A diffère très peu de 1. Si l'on pose $A = 1 + \alpha$, on peut donc négliger les puissances supérieures de α, et comme v est très grand, on peut négliger le terme $-\frac{Pa^2}{v^2}$.

NOTE **24**. Le mémoire ne dit pas à quelle température doit être le sulfure de carbone; mais on obtient le nombre donné dans le mémoire, si l'on suppose que la température est 0° et que la densité de l'air est 0,0012927.

RECHERCHES EXPÉRIMENTALES ET THÉORIQUES

SUR

LES INDICES DE RÉFRACTION.

(DEUXIÈME MÉMOIRE.)

RECHERCHES EXPÉRIMENTALES ET THÉORIQUES SUR LES INDICES DE RÉFRACTION.

VIDENSK. SELSK. SKR. T. X (5) 1875.* * NOTE 1

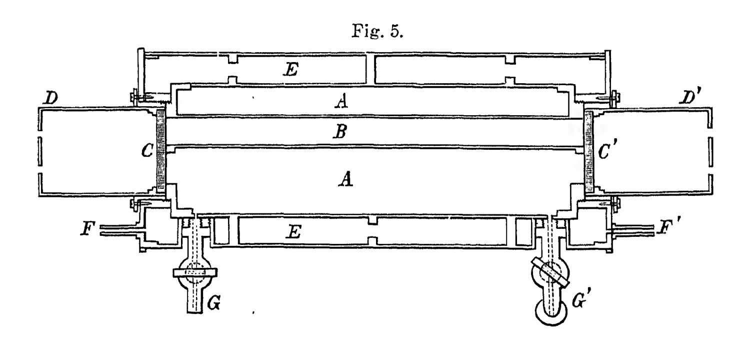
Je m'étais proposé dans mes recherches antérieures (Vidsk. Selsk. Skr. VIII (5), mémoire précédent d'obtenir par l'étude des indices de réfraction et de la dispersion une connaissance plus approfondie de la constitution moléculaire des corps. C'est le même objet que j'ai encore en vue dans les présentes recherches, dont le but principal est de déterminer l'influence de la température et de l'état physique sur la réfraction et la dispersion.

Pour déterminer la réfraction des gaz et des vapeurs, je me suis servi de la méthode des interférences de la même manière que je l'ai fait dans mes précédentes mesures des indices de réfraction de l'eau à différentes températures. Ici encore la source de lumière a été un bec de Bunsen, dont la flamme était colorée en rouge et en jaune par une mèche d'amiante placée dans une dissolution de chlorure de lithium additionnée d'une petite quantité de chlorure de sodium. Comme miroirs interférents j'ai employé les mêmes cubes de verre et la même disposition que dans les précédentes recherches; seulement ces cubes étaient placés a une plus grande distance l'un de l'autre, à savoir $1^m,5$, pendant que

la distance de la source de lumière au cube le plus voisin était de 0m,5. En même temps les cubes avaient été couverts d'ouate et la face antérieure réfléchissante abritée par une pièce de carton, qui recouvrait le milieu de la surface. Toutes ces précautions étaient destinées à éviter les erreurs qui pouvaient provenir des variations de la température du verre pendant la durée des expériences.

Les deux faisceaux de rayons lumineux réfléchis par le premier cube passaient, séparés par un intervalle de près de 28mm, par l'appareil que représente la figure, et qui était soutenu par un support de bois vernis et placé entre les deux cubes à égale distance de chacun d'eux.

Fig. 5.



La partie intérieure de l'appareil se compose d'un réservoir cylindrique *A*, par où passe un tube cylindrique *B*. A chaque extrémité du réservoir se trouvent deux ouvertures circulaires, dont l'une conduit au réservoir, l'autre au tube *B*. Ces ouvertures sont fermées par deux plaques de cristal *C* et *C'*, et une plaque de caoutchouc très mince et taillée en forme de 8 est placée entre chaque verre et la plaque terminale du cylindre. Les plaques de verre sont fortement serrées contre celles-ci au moyen de tubes *D* et *D'*, munis d'un collier extérieur

qui peut être serré contre le cylindre au moyen de vis. Les extrémités de ces deux tubes sont en partie recouvertes par deux disques de carton portant des coupures pour laisser passer les deux faisceaux lumineux, qui devaient passer par ces coupures et par les ouvertures circulaires conduisant au réservoir et au tube *B*. Le réservoir intérieur est entouré extérieurement d'un cylindre *EE*, fermé et destiné à contenir un courant d'eau ou de vapeur, qui entre par *F* et sort par *F'*. Pour faire circuler ce courant sur toute la surface du cylindre intérieur, l'intervalle entre les deux cylindres est divisé par des parois percées de trous et placées alternativement en haut et en bas. (Dans la figure, qui représente l'appareil vu d'en haut, ces trous sont placés sur les côtés). Deux tubes *G* et *G'* fermés par des robinets sortent du réservoir intérieur.

La distance des deux plaques de verre était de $314^{mm},52$ à 0° C., et le volume du réservoir intérieur était à 8° C. de $1823^{cc},6$.

Les rayons de la source de lumière*, qui étaient réfléchis par la face antérieure du premier cube, arrivaient par le tube *B* à l'autre cube, où ils étaient réfléchis par la surface postérieure, qui était argentée. Au contraire les rayons réfractés par le premier cube et réfléchis par sa face postérieure passaient par le réser-

* Outre la flamme de *Na-Li*, on a encore essayé de se servir comme source de lumière d'un tube de Geissler rempli d'hydrogène, qui fut disposé verticalement à la place de la flamme. J'ai obtenu de cette manière des franges d'interférence rouges et bleues assez nettes, mais elles n'étaient pourtant pas aussi distinctes que les franges rouges et jaunes de la flamme; et comme les mesures faites avec les premières franges fatiguaient beaucoup la vue, je me suis borné aux dernières.

voir A pour arriver à l'autre cube. Ils étaient réfléchis par la face antérieure de ce dernier, puis se combinaient avec l'autre faisceau. Les franges rouges et jaunes produites par l'interférence de ces deux faisceaux furent observées comme dans mes précédentes expériences au moyen de deux lentilles convergentes munies d'un réticule.

On commença les expériences avec cet appareil soit après avoir fait le vide dans le réservoir intérieur en laissant de nouveau rentrer l'air et en comptant le nombre de franges qui pendant l'afflux de l'air passaient devant le réticule, jusqu'à ce que la pression de l'air dans le réservoir fût devenue égale à la pression extérieure; soit en commençant de compter pendant que le réservoir était plein d'air et en continuant jusqu'à ce qu'on eût fait le vide. Le réservoir intérieur était par le tube G en communication avec une machine pneumatique de Geissler, et par le tube G' soit avec l'air extérieur, soit avec le réservoir qui contenait le gaz à étudier. Il va sans dire que je me suis convaincu avant chaque expérience que les franges étaient complètement immobiles lorsque les robinets du réservoir intérieur étaient fermés. En réalité il ne se présenta aucune difficulté ni par le fait des robinets ni par celui des verres C' et C'', s'ils étaient appliqués avec soin, de manière à fermer hermétiquement le réservoir intérieur aussi bien que le tube B, où était renfermé de l'air atmosphérique.

Pendant toute la durée de l'expérience on a fait circuler de l'eau, qui avait la température de l'air ambiant, par le réservoir extérieur E. On a mesuré la température de l'eau à l'entrée et à la sortie au moyen de deux thermomètres.

On a au contraire chauffé l'appareil pour presque toutes les expériences faites avec les vapeurs de différents liquides volatils et pour quelques expériences sur l'air atmosphérique, en amenant de la vapeur d'eau par le réservoir extérieur. On n'a commencé l'expérience qu'après avoir fait circuler assez longtemps la vapeur d'eau par le conduit extérieur et par le tube de dérivation F'', d'où la vapeur était amenée dans de l'eau froide pour être condensée.

Le liquide dont on voulait examiner la vapeur était renfermé dans une petite cucurbite, qui était composée d'un tube de verre terminé par une boule et muni d'un robinet.

Le volume de la cucurbite jusqu'au robinet était de 18cc,181. Après avoir en partie rempli la cucurbite de liquide, on l'a pesée, puis on l'a reliée, à robinet fermé, avec le réservoir intérieur de l'appareil au moyen d'un bouchon de caoutchouc, qu'on pouvait faire entrer dans l'élargissement de G' de manière à fermer le passage à l'air. Ensuite on a ouvert le robinet de métal G' du réservoir, après avoir auparavant épuisé l'air, pendant qu'on observait les franges. Après s'être de cette manière convaincu que le conduit de la cucurbite était bien fermé et imperméable à l'air, ce qu'on pouvait conclure de l'immobilité des franges, on a refermé le robinet de métal et ouvert le robinet de verre. Puis on a de nouveau ouvert le robinet de métal avec précaution, en observant toujours les franges pendant que la vapeur entrait dans le réservoir intérieur. La cucurbite a en même temps été chauffée plus ou moins par la vapeur de retour, qui de F'' était amenée dans un vase plein d'eau entourant la cucurbite, et de cette manière on a réglé

l'évaporation du liquide et en même temps la vitesse du déplacement des franges. Après avoir fait passer un certain nombre de franges devant le réticule, et quand le mouvement des franges était devenu sensiblement plus lent, on a fermé le robinet de métal *G'* et ouvert le robinet *G*, par où la vapeur s'est échappée du réservoir dans le conduit menant à la machine pneumatique, où elle a été condensée dans un réservoir entouré d'un mélange réfrigérant composé de glace et de sel marin. Puis on a de nouveau fermé le robinet *G*. La vapeur entra de nouveau de la cucurbite dans le réservoir intérieur et on observa le déplacement des franges. On continua ainsi plusieurs fois jusqu'à ce qu'on eût compté un assez grand nombre de franges, et enfin on ferma le robinet de la cucurbite, qui fut retirée de l'appareil et pesée après avoir été refroidie. En général on a ouvert le robinet un instant avant la pesée, car on a préféré introduire, pour l'air qui était entré dans la cucurbite, une correction dans les calculs, au lieu de se fier à ce que le robinet fût toujours complètement imperméable à l'air pendant le refroidissement, ce qui n'était pas toujours le cas, comme les premières expériences le firent voir.

On a en même temps observé le déplacement des franges jaunes et rouges, ce qui a beaucoup facilité le contrôle du dénombrement. Au commencement on a généralement réglé les franges de telle manière que le réticule passât par le milieu d'une frange rouge, qui elle-même était exactement située au milieu de deux franges jaunes.

Quelques franges ayant passé devant le réticule, la frange rouge fut couverte par une frange jaune, puis la

frange rouge a reparu. A un déplacement de huit franges jaunes correspondait celui de sept franges rouges; en comptant un assez grand nombre de déplacements et en observant à quel moment une frange rouge reparaissait au milieu de deux franges jaunes, on peut avec une très grande précision déterminer le rapport du nombre des franges rouges et jaunes déplacées en même temps.

Les calculs de ces expériences ont été faits de la manière suivante. Soient L la distance des deux plaques de verre C et C', l_{Na} la longueur d'onde de la raie du sodium dans le vide, S_{Na} le nombre des franges jaunes qui passent devant le réticule pendant que l'indice de réfraction de l'air ou de la vapeur amenée dans le réservoir intérieur vide d'air a pour valeur n_{Na}; on aura

$$L(n_{Na} - 1) = l_{Na} S_{Na}. \qquad (1)$$

La longueur du cylindre intérieur, mesurée au cathétomètre, était à 0° C. de $313^{\mathrm{mm}},72$, ce qui correspond à $314^{\mathrm{mm}},30$ à 98° C., température qui était vraisemblablement celle du cylindre quand il était chauffé par la vapeur d'eau. L'épaisseur des deux plaques minces de caoutchouc, qui étaient fortement comprimées, était au total de $0^{\mathrm{mm}},8$ à la température ordinaire et de $0^{\mathrm{mm}},4$ à 98° C. Par conséquent on a en millimètres

$$L = 314{,}52 \text{ à } 0^\circ \text{C. et } 314{,}70 \text{ à } 98^\circ \text{C.}$$

De plus, d'après Angström, les longueurs d'onde des deux raies de *Na* sont, en dix millioniêmes de millimètre, 5889 et 5895, dont la moyenne est 5892. En réduisant au vide, on aura donc en millimètres

$$l_{Na} = 0{,}00058937^{*},$$ * NOTE 2.

d'où il suit qu'on aura pour les expériences à des températures peu élevées

$$n_{Na}-1 = \frac{0,00058937}{314,52} S_{Na} = 0,0000018739\, S_{Na}. \qquad (2)$$

Cette formule s'applique immédiatement aux expériences sur les gaz, car elle détermine leurs indices de réfraction pour la lumière jaune correspondant à la pression et à la température qu'a le gaz amené dans le réservoir, quand on cesse de compter.

On a de plus, en se servant de notations analogues pour la lumière rouge de *Li*,

$$\frac{n_{Li}-1}{n_{Na}-1} = \frac{l_{Li}}{l_{Na}} \cdot \frac{S_{Li}}{S_{Na}} = 1,38953 \cdot \frac{S_{Li}}{S_{Na}}, \qquad (3)$$

où le rapport de deux longueurs d'onde est le nombre trouvé par M. le Dr Ketteler.

Pour faciliter le calcul des expériences de la réfraction de la vapeur, on peut écrire l'équation (1) sous la forme

$$\frac{L(n_{Na}-1)}{D} = \frac{l_{Na} S_{Na}}{D},$$

où D est le poids spécifique de la vapeur correspondant à l'indice de réfraction n_{Na} pour la lumière jaune. On a déterminé par les expériences le nombre S_{Na} de franges jaunes déplacées par un certain poids G de vapeur. Si le volume du réservoir intérieur est V et s'il est mesuré en centimètres cubes, le poids G étant évalué en grammes, on aura $D = \frac{G}{V}$. Si l'on pose $\frac{S_{Na}}{G} = s_{Na}$, s_{Na} étant le nombre de franges déplacées par chaque gramme de vapeur amené dans le réservoir, on obtiendra

'équation

$$\frac{n_{Na}-1}{D} = \frac{l_{Na}}{L} \cdot V \cdot s_{Na}. \tag{4}$$

En pesant l'eau que peut contenir le réservoir inté-
ieur, on a trouvé que son volume est 1823cc,6 à 8° C.,
e qui donnera à 98° C.

$$V = 1832{,}8.$$

Si l'on introduit dans l'équation ci-dessus la valeur
orrespondante de L, à savoir $L = 314{,}70$, on obtiendra
our les expériences en question

$$\frac{n_{Na}-1}{D} = 0{,}0034325 \cdot s_{Na}. \tag{5}$$

On aura donc pour les vapeurs le rapport de $n_{Na}-1$
u poids spécifique correspondant en multipliant par le
ombre ci-dessus le nombre de franges déplacées par
'évaporation d'un gramme du liquide. Comme ce rapport
st sensiblement constant pour toutes les valeurs de n
t de D, c'est précisément la quantité qu'il s'agit avant
out de déterminer immédiatement par des expériences,
t c'est pour atteindre ce but que les expériences ont
té disposées et l'appareil construit de la manière qu'on
a dite.

Pour les vapeurs assez peu nombreuses dont on a
usqu'ici étudié la réfraction, on a toujours cherché à
léterminer l'indice de réfraction correspondant à une
ression constante et à une température constante; mais
l est bien connu, comme l'a déjà trouvé Dulong, que
e rapport de $n-1$ à la pression n'est pas constant
a cause de l'écart de la pression de la vapeur par rap-
ort à la loi de Mariotte. Il est donc nécessaire, pour

trouver la constante de réfraction citée ci-dessus, constante qui est caractéristique pour la vapeur en question, d'invoquer d'autres expériences, à savoir celles qui font connaître le rapport de la pression des vapeurs à leur poids spécifique à la température considérée, et de cette manière on introduira dans les résultats de nouvelles sources d'erreur.

Enfin on a aussi mesuré l'indice de réfraction et le poids spécifique, à différentes températures, des liquides pour lesquels on avait déterminé la réfraction de la vapeur de la manière décrite ci-dessus. Pour atteindre ce but, on s'est servi d'un prisme creux taillé dans une pièce de verre perforée d'un trou cylindrique, qui pouvait être fermé par deux verres plans à faces parallèles. Ceux-ci pouvaient adhérer au prisme par simple adhésion, mais ils y furent encore fixés par deux bandes de caoutchouc, qui étaient liées à un anneau de métal entourant les verres. On pouvait remplir l'intérieur du prisme par un trou pratiqué en dessus, dans lequel était placé pendant la durée des expériences un petit thermomètre divisé en cinquièmes de degré et qui bouchait le trou.

Pour faire les mesures, on s'est servi d'une théodolite optique d'assez grandes dimensions fabriqué par M. le prof. Jünger, et qui était, comme le spectromètre de Meyerstein, muni d'un collimateur et d'une lunette à observation. Le cercle à mesure était divisé en douzièmes de degré et au moyen de deux microscopes on pouvait lire directement deux secondes. Une tablette sur laquelle était placée le prisme, et munie de vis calantes, était placée au milieu du cercle de telle manière qu'on ne pouvait pas sans difficulté faire tourner cette tablette indépendamment du cercle divisé. Le cercle et la lunette

pouvaient au contraire tourner ou conjointement ou séparément.

La méthode dont on s'est servi pour faire des observations avec cet appareil différait de celle qu'on a appliquée presque exclusivement jusqu'ici pour faire des mesures exactes et dont le but est de déterminer la déviation minima. Le but des mesures, dans mes expériences, était au contraire de *déterminer l'angle dont il fallait faire tourner le prisme pour obtenir la déviation donnée.* Cet angle, joint à l'angle réfringent du prisme et à la déviation constante, fournit les données nécessaires pour calculer l'indice de réfraction relatif à la longueur d'onde observée. Après avoir exécuté de nombreuses mesures par ce procédé auquel m'a conduit la construction même de l'appareil, je veux dire la connexion fixe de la tablette qui porte le prisme et du cercle divisé, je peux recommander la méthode comme exacte et propre à l'exécution pratique.

Soient n l'indice de réfraction du prisme, correspondant à une certaine longueur d'onde, i et i_1 les angles d'incidence et de réfraction du rayon incident, i'_1 et i' ceux du rayon émergent; on aura

$$\sin i = n \sin i_1 \quad \text{et} \quad \sin i' = n \sin i'_1,$$

d'où l'on peut déduire

$$\sin\frac{i+i'}{2}\cos\frac{i-i'}{2} = n \sin\frac{i_1+i'_1}{2}\cos\frac{i_1-i'_1}{2},$$

$$\cos\frac{i+i'}{2}\sin\frac{i-i'}{2} = n \cos\frac{i_1+i'_1}{2}\sin\frac{i_1-i'_1}{2}.$$

Si de plus on appelle $2p$ l'angle réfringent du prisme, $2a$ la déviation, c'est-à-dire l'angle constant que fait le

rayon émergent avec le rayon incident, et enfin $2b$ l'angle dont il faut faire tourner le prisme pour produire de nouveau la même déviation, on aura

$$i+i_1 = 2(a+p), \quad i_1+i'_1 = 2p, \quad i - i' = \pm 2b.$$

Les deux équations précédentes peuvent alors s'écrire

$$\sin(a+p)\cos b = n \sin p \cos\frac{i_1 - i'_1}{2},$$

$$\pm\cos(a+p)\sin b = n\cos p \sin\frac{i_1 - i'_1}{2}.$$

Si l'on élimine $i_1 - i'_1$ et si l'on pose pour abréger

$$\frac{\sin(a+p)}{\sin p} = n_0, \tag{6}$$

il viendra

$$n^2 = n_0^2 + \frac{(n_0^2 - 1)\sin^2 b}{\cos^2 p}. \tag{7}$$

Ces deux équations servent au calcul de n^2 après qu'on a déterminé par des expériences les trois angles p, a et b. La dernière équation fait voir que n_0 est l'indice de réfraction correspondant à l'onde pour laquelle $b = 0$, et pour laquelle la déviation constante est par conséquent la déviation minima. La position correspondante du prisme est sa position moyenne pour la même déviation constante dans chaque série d'expériences sur différentes longueurs d'onde ; car l'équation (7) montre que b et $-b$ donnent à n la même valeur, par où l'on voit qu'en faisant tourner le prisme de l'angle $2b$, on l'a fait tourner de l'angle b de part et d'autre de ladite position moyenne. Par conséquent, si l'on a lu sur le cercle divisé pour la même raie spectrale les deux angles α et α_1 correspondant à la déviation donnée, c'est qu'on a fait tourner le prisme de $2b = \pm(\alpha - \alpha_1)$.

et l'angle $\frac{\alpha + \alpha_1}{2}$ du cercle divisé correspond à la position moyenne. Si de plus les angles mesurés pour une autre raie du spectre sont β et β_1, la position moyenne correspond à $\frac{\beta + \beta_1}{2}$. Il suit de là que $\alpha + \alpha_1 = \beta + \beta_1$, et ainsi de suite pour toutes les longueurs d'onde observées. Ces relations entre les angles observés fournissent un fort bon contrôle de l'exactitude des mesures.

La localité où ont été faites les expériences était le château de Frederiksberg situé sur une colline assez élevée; l'appareil était placé de manière qu'on pût observer à l'aide de la lunette l'horizon distant de plusieurs milles géographiques. Après avoir placé l'axe de rotation en position verticale, on dirigea vers l'horizon la lunette mobile autour d'un axe horizontal et l'on visa précisément les objets les plus distants. La lunette fut ensuite tournée vers le tube du collimateur, et la moitié supérieure de sa fente éclairée fut couverte d'un diaphragme, de manière que la fente vue par la lunette ne s'étendit que jusqu'au fil horizontal du réticule qu'elle touchait tout juste; de plus le tube de glissement du collimateur fut réglé de manière a viser nettement la fente.

Quand on avait versé dans l'intérieur du prisme le liquide dont on devait mesurer l'indice de réfraction, on a toujours mesuré l'angle réfringent. La lunette fut dirigée vers le croisillon d'une fenêtre d'un bâtiment situé à grande distance, le prisme fut placé sur la tablette de l'appareil et la lunette fut tournée jusqu'à ce qu'on vit dans le champ l'image du croisillon réfléchie par une des surfaces du prisme. Ensuite on réglait le prisme au moyen des vis calantes de la tablette, on fixait la lunette, puis on faisait tourner la tablette et le cercle divisé

jusqu'à ce qu'on vît l'image réfléchie par l'autre face du prisme, on réglait de nouveau la position de la tablette au moyen des vis calantes, et on continuait de cette manière jusqu'à ce qu'on vît précisément les deux images de la mire coïncider avec le réticule. L'arête refringente était alors verticale et on mesurait exactement l'angle réfringent au moyen du cercle divisé.

Comme source de lumière on s'est servi en même temps de la flamme de *Li-Na* et d'un tube de Geissler à hydrogène, qui était placé entre la flamme et la fente du tube du collimateur. Quand la lumière qui en sortait était observée par la lunette après s'être refractée, on voyait généralement cinq raies lumineuses verticales. On ne s'est pourtant en general servi que de quatre d'entre elles, car la raie violette de l'hydrogene n'était généralement pas assez brillante. La lunette fut tournée autour de son axe horizontal de manière que les raies touchassent précisément le fil horizontal, et on la régla par une rotation de l'appareil autour de l'axe vertical, de manière qu'un rayon lumineux de refrangibilite un peu plus grande que celle de la raie *F* de la flamme de l'hydrogène éprouvât une déviation minima dans la direction de l'axe de la lunette. En faisant tourner le prisme et le cercle divisé, les quatre raies passerent successivement deux fois devant le reticule.

Après avoir observé le thermomètre dans le prisme, on a fait tourner le cercle divisé de manière a faire passer les raies devant le réticule en général dans l'ordre *Li*, H_α, *Na*, H_β; H_β, *Na*, H_α, *Li*, et on a lu les huit angles correspondants. Puis on a de nouveau observé le thermomètre. On a enlevé le prisme, fixe le cercle divise, lu l'angle et ramené la lunette dans la direction du colli-

mateur de manière à pouvoir observer sa fente dans le réticule de la lunette.

Par cette observation on a déterminé la déviation constante pendant l'expérience, et l'expérience était alors terminée.

Ce qui a produit la plupart des erreurs c'est la variation de la température; c'est pourquoi on a rejeté les expériences où cette variation surpassait quelques dixièmes de degré. Pour avoir des mesures d'indices de réfraction à différentes températures, on fit des expériences en différentes saisons. En ce qui concerne la critique de l'exactitude des résultats, je renverrai à la détermination de l'indice de réfraction de l'éther éthylique, pour lequel j'ai exécuté les calculs de manière qu'ils peuvent en même temps, en vertu de la dispersion régulière du corps, servir de contrôle de l'exactitude des résultats.

Enfin on a encore déterminé le poids spécifique, à différentes températures, des mêmes corps dont on avait mesuré l'indice de réfraction. La détermination du poids spécifique a été faite en général par la pesée d'un corps (un poids doré de 20 gr.) suspendu à un fil de platine ($0^{mm},06$ d'épaisseur), et qu'on a plongé dans le liquide. Ces expériences n'ont été faites, comme les expériences mentionnées ci-dessus, qu'à la température de l'air ambiant.

Toutes les substances dont je me suis servi proviennent du laboratoire de l'Université et m'ont été fournies par M. le Dr Topsøe, à qui j'exprime ici les remerciements qui lui sont dus pour le soin et l'habileté qu'il a mis à préparer des substances chimiquement pures.

Avant de citer les résultats de chaque expérience en particulier, il faut que j'expose les considérations théoriques qui m'ont guidé.

Dans le premier mémoire sur ce sujet j'ai cherché à établir théoriquement la relation entre l'indice de réfraction des corps et leur poids spécifique à des températures différentes et à des états physiques différents, surtout en me servant comme point de départ de la théorie de la lumière exposée dans les tomes 118 et 121 des Ann. de Pogg. (quatrième et cinquième mémoires de cette édition). Je n'ai tenu compte que de l'indice de refraction absolu, réduit à une longueur d'onde infiniment grande, et j'ai trouvé que cette quantité, que j'ai designée par A, est approximativement determinée par l'equation

$$\frac{A^2-1}{A^2+2}v = P\left(1+\frac{a^2}{v^2}\right), \tag{8}$$

valable pour les corps isotropes, v étant le volume de l'unité de poids du corps, et P et a étant deux quantités constantes pour les variations de la température et du volume, pourvu que le corps soit composé de molécules séparées par des intervalles dans lesquels la vitesse de la lumière est égale à celle du vide, et qui eux-mêmes ne sont pas influencées par lesdites variations.

Ce résultat ne dépend pas de la forme des molécules. Si l'on veut au contraire faire encore un pas de plus et calculer l'indice de réfraction correspondant à une longueur d'onde quelconque, de grandes difficultés s'opposeront aux calculs. Pour cette raison je n'ai mené les calculs jusqu'au bout que dans le cas simple où les molécules sont sphériques, et j'ai trouvé, en supposant de plus que la vitesse est toujours la même à l'intérieur des surfaces sphériques qui limitent les molécules, qu'on aura approximativement

$$\frac{n^2-1}{n^2+2}v = \frac{n'^2-1}{n'^2+2}v'\left(1+\frac{n'^2-1}{n'^2+2}\,\frac{16\pi^2}{5}\,\frac{\varepsilon^2}{\lambda^2}\right). \tag{9}$$

Ici n' désigne l'indice de réfraction de la molécule ou le rapport des vitesses de propagation de la lumière dans le vide et à l'intérieur de la molécule, v' le volume de l'unité de poids des molécules, λ la longueur d'onde et ε le rayon des molécules. On voit par ce résultat qu'on peut expliquer la dispersion des corps sans supposer une vitesse de propagation à l'intérieur des molécules variable avec l'impulsion lumineuse ou la longueur d'onde de la lumière, car l'équation ci-dessus s'accorde essentiellement avec la loi de la dispersion, si l'on suppose que n' ne dépend pas de λ.

Bien qu'on ne puisse pas admettre que les suppositions simples dont on a déduit la dernière équation soient remplies dans la réalité, le résultat obtenu n'est pourtant pas sans application, car on peut plus généralement supposer que ε est une limite inférieure du rayon de la sphère d'action des molécules, si cette surface est considérée comme une surface sphérique entourant la molécule et dans l'intérieur de laquelle l'influence de la molécule sur la vitesse de propagation de la lumière est appréciable.

Le dernier terme de l'équation (6), savoir

$$\frac{n'^2-1}{n'^2+2}\,\frac{16\pi^2}{5}\,\frac{\varepsilon^2}{\lambda^2}$$

peut être déterminé numériquement par les expériences, et on trouvera par exemple, pour plusieurs substances examinées dans ce qui suit, que cette quantité est approximativement égale à 0,22 pour la raie du sodium. De là on peut déduire, $\frac{n'^2-1}{n'^2+2}$ étant nécessairement plus petit que 1,

$$\varepsilon > 15 \text{ millionièmes de millimètre},$$

ce qui est ici la limite inférieure du rayon de la sphère d'action déduite de la dispersion. Quincke a conclu de ses expériences sur l'adhésion (Pogg. Ann., t. 137) que ce rayon est pour différents corps approximativement égal à 50 millionièmes de millimètre, ce qui concorde bien avec la limite inférieure trouvée ci-dessus.

Il résulte de toutes les expériences que $\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} v$ est approximativement constant, même pour de très grandes variations du volume. C'est pourquoi j'appelle cette quantité la constante de réfraction du corps. Elle n'est pourtant pas absolument constante, car elle croît un peu par des accroissements simultanés du volume et de la température. Au moyen de quelques expériences sur l'air atmosphérique et sur la vapeur d'éther j'ai cherché à déterminer l'influence directe des variations de la température sur la constante de réfraction; j'ai trouvé qu'il n'en existe pas d'appréciable et les mêmes expériences ainsi que celles sur la vapeur de sulfure de carbone ont démontré que la dispersion est précisément la même à la température ordinaire et à une température de 100° C. Comme l'accroissement mentionné de la constante de réfraction par un accroissement du volume est en concordance avec le résultat théorique de l'équation (8) et par conséquent peut être expliqué sans supposer aucune variation des molécules elles-mêmes, on doit reconnaître, comme conséquence des expériences aussi bien que de la théorie, que les propriétés optiques des molécules sont à un degré remarquable et peut-être souvent complètement indépendantes des variations de la température, du poids spécifique et de l'état physique.

C'est à cette même conclusion que l'on est conduit plus immédiatement par la considération des raies du

spectre, dont la position est pour ainsi dire complètement indépendante de la température et de la densité du corps. Car, quelle que soit d'ailleurs la théorie qu'on suive, on doit considérer les raies du spectre comme dépendant spécialement des molécules et de leurs propriétés optiques, et par conséquent l'invariabilité des raies entraîne l'invariabilité des molécules elles-mêmes.

Au contraire un changement considérable de la constante de réfraction, de la dispersion et de la position des raies spectrales se produira souvent, si un mélange de différentes substances se change en une combinaison chimique, par où l'on voit qu'ici la modification s'étend aux molécules elles-mêmes.

Les conséquences des conclusions auxquelles nous arrivons ici se feront sentir sur d'autres points de la science. Ainsi on a fait différentes hypothèses pour faire concorder avec les expériences les résultats déduits de la théorie du choc relativement à la diffusion des gaz, à leur frottement intérieur et à leur conductibilité calorifique. On a supposé, ou comme Maxwell, que deux molécules se repoussent avec une force proportionnelle à la cinquième puissance de leur distance, ou comme Stephan, que les molécules se comportent comme des sphères élastiques dont les diamètres varient avec la température, le diamètre étant inversement proportionnel à la quatrième puissance de la température. Il me semble qu'on peut au préalable faire l'objection que les forces qui agissent entre les molécules dans les deux théories ne sont pas de nature à produire nécessairement un mouvement permanent des molécules, ce qui aurait certainement lieu si les forces agissaient suivant les mêmes lois que les actions à distance que nous connaissons jusqu'ici.

Mais il est bien possible que les forces hypothétiques dont on vient de parler puissent se faire équilibre sans aucun mouvement. Seulement la dernière hypothèse est surtout en contradiction avec l'invariabilité des molécules, qui, d'après ce que j'ai cherché à démontrer, apparait dans leurs propriétés optiques.

1. Air atmosphérique.

Les expériences, qui ont commencé dans l'hiver de 1870, ont été répétées très souvent à cause de la divergence des résultats avec ceux qu'on connaissait alors de Biot, Arago, Jamin, Ketteler, et qui concordaient entre eux.

L'air très pur était amené du dehors par un long tube de verre, par deux tubes en *U* à chlorure de calcium et à potasse et enfin au réservoir intérieur de l'appareil. De l'eau à la température de l'air circulait dans le réservoir extérieur. Je citerai en particulier les mesures faites à la fin de juin 1870 et au mois de janvier suivant, auxquelles j'attache la plus grande importance.

	H	*h*	*t*	*s'*	*s*
	mm.	mm.			
	752,18	0,1	15°,00	145,8	155,44
	752,18	0,1	15°,25	145,7	155,49
	755,32	1	2°,75	152,75	155,45
	747,83	1	3°,25	151,1	155,58
* NOTE 3.	738,34*	1	3°,28	151,1	155,50
				Moyenne	155,49

Dans ce tableau la pression de l'air extérieur, qui ait aussi la pression finale du réservoir, est désignée ur H, la pression dans le réservoir au commencement ı dénombrement par h, la température de l'eau amante par t, le nombre des franges de Na déplacées ur s', et le même nombre réduit à la pression de 760^{mm} à la température de congélation de l'eau par s. On calculé la réduction par la formule

$$s = s' \frac{760}{H - h} (1 + 0{,}00367\, t).$$

Voici les résultats de toutes les expériences, rangés ur ordre de grandeur et réduits de la même manière la température 0° C. et à la pression de 760^{mm}.

154,4	(1°)	155,45	(2°,75)	155,7	(3°,66)
154,9	(6°,9)	155,49	(15°,25)	155,8	(9°,69)
155,15	(1°,25)	155,50	(3°,28)	155,85	(16°,25)
155,3	(8°)	155,5	(3°,5)	155,96	(16°,85)
155,44	(15°)	155,58	(3°,25)	156,3	(7°,5)
		Moyenne		155,487	

La température indiquée entre parenthèses est celle laquelle les expériences ont été faites.

On a souvent pour les pressions les plus basses oservé la pression toutes les fois qu'une raie passait evant le réticule, par où l'on a reconnu que la variation la pression correspondante au passage d'une frange ait toujours la même, et cela même pour les plus randes raréfactions, les écarts étant très petits et ne déassant pas les erreurs d'observation.

Dans la réduction relative à la température on a fait l'hypothèse que l'indice de réfraction de l'air ne dépend que de la densité et qu'il ne varie pas avec la température, si la densité reste invariable. L'admissibilité de cette hypothèse est déjà confirmée par les expériences citées, mais en outre quelques expériences ont été faites avec l'appareil chauffé par un courant de vapeur qui avait circulé dans le réservoir extérieur. On a trouvé dans trois expériences que le nombre des franges déplacées était

115,1, 115,0, 115,8, moyenne 115,4,

pour une variation de la pression égale à 760^{mm}. On ne pouvait pas immédiatement déterminer la température du réservoir intérieur, mais on l'a calculée par la formule de réduction citée ci-dessus et par le nombre des franges correspondant à 0°, à savoir par la formule

$$155{,}49 = 115{,}3\,(1 + 0{,}00367\,t);$$

on a trouvé pour la température $t = 95°$ C. Cette valeur peut être considérée comme très voisine de la vraie température, qui en tout cas ne peut s'écarter de plus de 5° de la température calculée. Dans toutes les expériences on a en même temps observé les raies rouges de *Li*. La détermination du rapport des nombres de franges jaunes et rouges déplacées était ici très facile, car aussi bien dans les expériences à la température de l'air ambiant que si l'appareil était chauffé par la vapeur d'eau, on voyait pendant toute la durée du dénombrement passer toujours exactement en même temps huit franges jaunes et sept franges rouges, quand l'air revenait de la plus grande raréfaction jusqu'à la pression atmosphérique.

L'indice de réfraction n_{Na} de la raie du sodium, pour l'air atmosphérique sec à une pression de 760mm et à 0° C., est en vertu de l'équation (2), déterminé par

$$n_{Na} - 1 = 0{,}0000018739 \cdot 155{,}49\,,$$

d'où

$$n_{Na} = 1{,}00029137\,.$$

En réduisant de la latitude de Copenhague à la latitude de 45°, on obtiendra

$$n_{Na} = 1{,}00029108\,.$$

De plus on peut au moyen de cette valeur calculer la constante de réfraction $P = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} v$, qui pour les vapeurs et les gaz peut être égalée à $\frac{2}{3}(n-1)v$. Le poids spécifique de l'air atmosphérique $\left(\frac{1}{v}\right)$ étant 0,00129267, on trouve

$$P_{Na} = 0{,}15012\,.$$

Pour les franges de Li on trouve d'après (3)

$$\frac{S_{Li}}{S_{Na}} = \frac{7}{8}\,, \quad n_{Li} = 1{,}00029009\,, \quad P_{Li} = 0{,}14959\,.$$

La dispersion est avec une plus grande précision déterminée par

$$\frac{n_{Na} - n_{Li}}{n_{Na} - 1} = 0{,}00342\,.$$

Au moyen de la formule de dispersion $n_\lambda = A + \frac{B}{\lambda^2}$ on a encore calculé le tableau suivant des indices de réfraction des raies de Fraunhofer:

$$n_A = 1{,}00028935\,,$$
$$n_B = 1{,}00028993\,,$$
$$n_C = 1{,}00029024\,,$$
$$n_D = 1{,}00029108\,,$$

$$n_E = 1{,}00029217,$$
$$n_F = 1{,}00029312,$$
$$n_G = 1{,}00029486,$$
$$n_H = 1{,}00029631.$$

Pour l'air humide l'indice de réfraction est un peu moindre. A l'aide des expériences sur la réfraction de la vapeur d'eau, qui seront rapportées dans ce qui suit, on trouvera pour une pression ϖ de la vapeur, supposée loin du point de saturation,

$$n_{Na} - 1 = 0{,}000250 \cdot \frac{\varpi}{760(1 + 0{,}00367\, t)};$$

on voit que l'on doit, pour l'air humide où la vapeur a une pression ϖ, ajouter la correction

$$-0{,}000041 \frac{\varpi}{760}$$

à l'indice de réfraction mentionné ci-dessus.

Nous allons comparer ces résultats à ceux qui ont été trouvés par d'autres observateurs.

Les expériences célèbres d'Arago et Biot (Mém. de l'Inst., t. VII, 1806 et 1807) faites avec le prisme ont donné pour la lumière blanche l'indice de réfraction, réduit à 0° C. et 760^{mm}, $n = 1{,}00029458$. Le Dr Ketteler („Farbenzerstreuung der Gase", Bonn, 1865) a trouvé par la méthode des interférences $n_{Na} = 1{,}00029470$, et Jamin (Ann. de ch., t. 59) pour la lumière blanche $n = 1{,}000294$.

Les résultats des expériences plus récentes de Mascart (C. R. de l'Acad. des sciences, t. 78, p. 617 et 679, 1874), s'approchent plus de la valeur trouvée par moi. Mascart s'est aussi servi de la méthode des interférences, mais au lieu des miroirs de Jamin il a employé la mé-

thode de Fizeau, où les rayons sont séparés par deux verres obliques à faces parallèles et superposés de nouveau par un système semblable opposé. Les deux rayons étaient séparés par un intervalle de plusieurs millimètres, intervalle qui vraisemblablement était beaucoup moindre que dans mes expériences (environ 28mm). Mascart a trouvé à 0° C. $n_{Na} = 1{,}0002923$, et pour t degrés le facteur de réduction $1 + 0{,}00383\,t$. Ici le coefficient de t est un peu plus grand que le coefficient de dilatation de l'air. Les expériences de V. von Lang publiées l'année passée (Pogg. Ann., t. 153, Wiener Sitzungsber., t. 69, Abt. 2) et dont le but spécial était de déterminer l'influence de la température sur la réfraction, ont au contraire donné comme résultat $n_t = n_0 - 0{,}905 \cdot 10^{-6}\,t + 0{,}00239 \cdot 10^{-6}\,t^2$, valable entre les limites $t = 0°$ C. et $t = 95°$ C., résultat qui donne un écart de sens opposé à celui de M. Mascart, le facteur de réduction étant, en vertu de cette formule, approximativement égal à $1 + 0{,}00311\,t$. Toutefois on voit, par l'absence de détermination de la dispersion, que la méthode de Lang n'est pas assez exacte, et en réalité elle ne consiste qu'en une application, du reste ingénieuse, de la méthode des prismes; mais la précision obtenue par cette méthode ne peut cependant pas, comme l'a aussi reconnu Mascart, être comparée à celle de la méthode des interférences. J'ai trouvé plus haut dans le voisinage du point d'ébullition de l'eau un déplacement de 115,3 franges; ce résultat, combiné avec celui de Lang, donnerait une température du réservoir d'environ 120° C., ce qui, cela va sans dire, est impossible.

Par le calcul des observations de la réfraction astronomique, Delambre a trouvé (Mém. de l'Inst., t. VII) $n = 1{,}00029407$. Bessel au contraire (cf. Biot, C. R., t. 40)

a calculé ses tableaux de la réfraction en supposant $n-1$ égal à l'angle 57″,538 à une température de 9°,305 C. et à une pression de 751mm,8, ce qui donne $n = 1{,}000291608$ à 0° C. et à une pression de 760mm.

Les astronomes se sont servis après lui de cette valeur, quoique les physiciens fussent d'accord pour trouver qu'elle était trop petite.

Gyldén (Mém. de l'Acad. de Saint-Pétersbourg, t. X, nº 1, 1866, et t. XII, nº 4, 1868) pose, après „une discussion préliminaire“ des observations faites à Pulkova, $\frac{n^2-1}{2n^2} = \alpha = 0{,}00027985$, pour une température de 7°,44 R. et une hauteur barométrique égale à 29,5066 pouces anglais, d'où l'on peut calculer $n = 1{,}00029276$ à 0° C. et à 760mm. Le facteur de correction relatif à la température est ici $1 + 0{,}003689\,t$.

V. Fuss a corrigé la valeur déduite par la discussion préliminaire de α (ibid., t. XVIII, nº 3, 1872), dont s'est servi Gyldén, et trouvé $\alpha = 0{,}00027837$, nombre auquel correspond $n = 1{,}00029121$. Le point du spectre des étoiles visé dans la lunette est indiqué plus précisément (p. 3) comme correspondant au milieu de la partie „qui saute le plus aux yeux“ et par conséquent „à peu près à la région du jaune ou du vert.“

Le résultat final des observations astronomiques est complètement d'accord avec le tableau calculé par moi, spécialement si l'on tient compte du fait qu'il est valable pour l'air sec. Les astronomes n'ont pas réussi à déterminer les corrections pour la vapeur d'eau.

Bessel a indiqué que la dispersion de l'air entre les limites des raies, de B à G, est 0,0126 de la réfraction. Cette détermination serait en concordance avec mes résultats, si l'on remplaçait la raie G de Fraunhofer par

une raie comprise entre F et G, mais toutefois plus rapprochée de F. Le Dr Ketteler a déterminé avec plus de précision la dispersion par la méthode des interférences („Farbenzerstreuung der Gase“, Bonn, 1865). Il a aussi le premier fait l'observation importante pour la théorie, que le rapport de la dispersion à la réfraction de l'air est indépendant de la pression, qui dans ses expériences était comprise entre les limites 0,63 et 2,56 atmosphères. J'ai trouvé que cette loi est confirmée jusqu'à la plus grande raréfaction et ma détermination de la dispersion est complètement d'accord avec celle de Ketteler. On voit encore par mes expériences que la dispersion est indépendante de la température entre les limites 0° et 100° C.

Parmi les autres observateurs on peut nommer Croullebois, dont les expériences doivent toutefois être considérées comme manquées, et Mascart, qui par ses expériences citées plus haut a trouvé presque la même dispersion que le Dr Ketteler et moi (plus grande d'environ 8 pour 100).

2. *Oxygène. O.*

L'oxygène était dégagé de l'oxyde rouge de mercure dans une cornue de platine, et conduit par des tubes de verre et de porcelaine au réservoir intérieur de l'appareil. Comme les expériences préliminaires avaient montré un accroissement appréciable de la dispersion, quand on chauffait trop la cornue, ce qu'il fallait attribuer à une trace de vapeur de mercure entraînée dans le réservoir, on interposa dans le conduit un tube rempli de soufre en poudre dans les expériences finales. Au commencement de chaque expérience on a fait le vide presque

complet dans l'appareil et la cornue, puis on a chauffé la cornue en comptant les franges jusqu'à ce que le nombre des franges déplacées fut devenu un peu plus grand que celui qui répondait à la pression de l'air ambiant et qui était connu par des expériences préliminaires. Puis le réservoir fut isolé de la cornue et l'oxygène en excès fut évacué par l'autre robinet dans l'air extérieur; on compta alors le nombre de franges qui repassaient en sens inverse, et ce nombre fut soustrait du nombre trouvé en premier lieu. Par suite l'expérience prenait fin quand la pression était devenue celle de l'air extérieur.

Les résultats de toutes les expériences, à l'exception des deux premières, qui n'étaient que préliminaires, sont présentés dans le tableau suivant.

H	h	t	s'	s
mm.	mm.			
753,35	0,1	15°,94	136,0	145,25
764,54	3,5	15°,78	136,7	144,40
757,44	0,3	16°,25	136,2	144,85
753,85	0,5	16°,38	135,6	145,02
748,36	2,0	4°,35	140,8	145,66
748,36	4,0	4°,35	140,0	145,18
			Moyenne	145,06

Les notations sont les mêmes que celles dont je me suis servi précédemment. De la moyenne trouvée pour le nombre des franges de *Na*, réduit à un accroissement de pression d'une atmosphère et au point de congélation de l'eau, on peut déduire

$$n_{Na} = 1{,}00027155, \quad P_{Na} = 0{,}12666,$$

où la pression normale est en même temps réduite à la latitude de 45°. Le poids spécifique de l'oxygène a été pris égal à 0,0014293 dans la détermination de la constante de réfraction P_{Na}.

Le rapport de la dispersion à la réfraction se montra ici un peu plus grand que pour l'air atmosphérique, car au déplacement de 135 franges jaunes répondit celui de 118 franges rouges. On en déduit

$$n_{Li} = 1{,}00027034, \quad P_{Li} = 0{,}12609.$$

La dispersion est déterminée avec plus de précision par

$$\frac{n_{Na} - n_{Li}}{n_{Na} - 1} = 0{,}00447.$$

Dulong a de plus déterminé le rapport de la réfraction d'une série de corps à celle de l'air atmosphérique par ses belles expériences bien connues. Pour l'oxygène Dulong a trouvé le rapport 0,924, ce qui, combiné avec l'indice de réfraction de l'air atmosphérique déduit de mes expériences, donne pour l'oxygène $n_{Na} = 1{,}0002690$.

3. *Azote. N.*

Je n'ai pas fait d'expériences directes sur la réfraction de l'azote, mais j'ai trouvé par le calcul des indices de réfraction pour l'air atmosphérique*

* NOTE 4.

$$n_{Na} = 1{,}0002960, \quad P_{Na} = 0{,}15713,$$
$$n_{Li} = 1{,}0002951, \quad P_{Li} = 0{,}15663,$$
$$\frac{n_{Na} - n_{Li}}{n_{Na} - 1} = 0{,}00316.$$

Dulong a trouvé que le rapport de la réfraction de l'azote à celle de l'air atmosphérique était 1,020, d'où $n_{Na} = 1,0002969$.

Mascart a, dans ses expériences mentionnées ci-dessus, trouvé $n_{Na} = 1,0002972$. En ce qui concerne la dispersion, les écarts sont plus grands, car Mascart trouve une dispersion plus grande (définie par le coefficient B de la formule $n - 1 = A\left[1 + \frac{B}{\lambda^2}\right]$) pour l'azote que pour l'air atmosphérique, tandis que mes expériences donnent un résultat contraire.

4. Hydrogène. H.

L'hydrogène était dégagé d'un flacon où l'on avait mis du zinc sur lequel fut versé par un entonnoir muni d'un robinet de l'acide sulfurique bien pur; le gaz se purifiait ensuite en passant par un système de cinq tubes en U à potasse, à chloride de mercure à chlorure de calcium et à chaux hydratée (deux tubes).

On a commencé par faire presque complètement le vide dans le réservoir, qui était en communication avec l'appareil de dégagement, puis on a versé l'acide sulfurique sur le zinc; l'hydrogène dégagé était conduit au réservoir et à la machine pneumatique. Quand la pression était devenue égale à celle de l'air extérieur, l'hydrogène dégagé était évacué par la machine pneumatique dans l'atmosphère, et l'on continuait encore pendant quelque temps à amener l'hydrogène dans le réservoir en observant les franges, jusqu'à ce qu'elles fussent devenues complètement immobiles. Puis l'appareil de dégagement fut isolé du réservoir, et on a de nouveau fait le vide par la machine pneumatique en comptant les franges.

Toutes les mesures exécutées sont consignées dans le tableau suivant.

H	h	t	s'	s
mm.	mm.			
763,77	15	3°,50	70,5	72,48
767,11	11,5	5°,88	73	75,01
767,39	22,75	6°,90	71	74,30
767,09	11	4°,42	72	73,62*
764,84	10,5	6°,85	72	74,37
757,33	2	3°,75	73	74,46
776,29	2	0°	75,5	74,11
776,29	4	0°,13	75	73,84
			Moyenne	74,02

* NOTE 5.

Dans les deux dernières expériences on a fait repasser l'hydrogène dans l'appareil après qu'on eut cessé de compter, par où l'on vit que les franges revenaient à leur position primitive. Si l'on attribue pour cette raison un poids double aux deux dernières expériences et si l'on rejette les deux premières, on obtiendra comme moyenne $s = 74{,}08$.

A ceci correspond

$$n_{Na} = 1{,}0001387, \quad P_{Na} = 1{,}0325,$$

le poids spécifique étant 0,00008957.

A un déplacement de 55,5 franges jaunes correspond celui de 48,5 franges rouges. Par conséquent on aura

$$n_{Li} = 1{,}0001380, \quad P_{Li} = 1{,}0277, \quad \frac{n_{Na} - n_{Li}}{n_{Na} - 1} = 0{,}00470.$$

La réfraction de l'hydrogène par rapport à celle de l'air est, d'après Dulong, 0,470, d'où $n_{Na} = 1{,}0001368$. Ketteler a trouvé $n_{Na} = 1{,}00014294$, $n_{Li} = 1{,}00014288$, et par conséquent à peu près la même dispersion que moi (71,5 franges jaunes pour 62,5 franges rouges et dans une autre expérience 63,6 pour 55,5), mais au contraire une réfraction notablement plus grande que celle que j'ai trouvée. Mascart a $n_{Na} = 1{,}0001388$, ce qui concorde presque complètement avec mon résultat. Il trouve au contraire que le coefficient de dispersion de l'hydrogène est notablement plus petit que celui de l'air, tandis que Ketteler et moi avons trouvé qu'il est plus grand.

5. *Eau.* H_2O.

Les expériences sur la réfraction de la vapeur d'eau furent exécutées de la même manière que j'ai déjà décrite précédemment et dont je me suis servi pour étudier les vapeurs de tous les liquides. Dans le tableau ci-dessous G désigne le poids en grammes de l'eau évaporée, S le nombre total des franges de *Na* déplacées par cette évaporation, et s le rapport de S à G ou le nombre des franges déplacées par l'évaporation d'un gramme d'eau.

G	S	s
1,2252 + 0,0180	112 + 0,41	90,42
1,755 + 0,018	160 + 0,36	90,45
2,8073 + 0,0178	256 + 0,36	90,74
5,3105 + 0,0163	480 + 0,25	90,16
11,1681	1009,38	90,38

La dernière ligne donne la somme de tous les poids et celle de toutes les franges déplacées, d'où l'on a déduit le quotient final 90,38. *Comme exemple des calculs des petites corrections faites dans les deux colonnes, je citerai les détails de la première expérience. La petite cucurbite remplie d'eau pesait $23^{gr},4142$ avant l'expérience et $22^{gr},1890$ après, et on a compté 112 franges en totalité. Dans toutes ces expériences la vapeur du réservoir intérieur fut amenée à la machine pneumatique chaque fois qu'on avait fait passer exactement 32 franges devant le réticule (une seule fois 16). Le volume de la cucurbite était $18^{cc},181$ et son poids $19^{gr},056$. * NOTE 6.

Il y avait donc lors de la première pesée $4^{gr},3582$ d'eau et $13^{cc},823$ d'air humide dans la cucurbite. La température était 9° C. On trouve par suite que le poids d'air sec contenu dans la cornue était $0^{gr},0166$. Un gramme d'air sec produirait dans le réservoir un déplacement de 65,5 franges et un gramme de vapeur d'eau un déplacement d'environ 90,4 franges, ce qui fait 24,9 franges de plus. S'il y avait eu dans le réservoir au lieu de $0^{gr},0166$ d'air sec le même poids de vapeur, le déplacement eût été de $0,0166 \cdot 24,9 = 0,41$ franges plus grand, correction qui a été ajoutée au nombre de franges trouvé. De plus la cucurbite, dans la seconde pesée, contenait $3^{gr},1330$ d'eau et $15^{cc},048$ d'air humide, ce qui donne un poids d'air sec égal à $0^{gr},0180$. Le poids d'eau évaporée est donc

$$4,3582 - (3,1330 - 0,0180) = 1,2252 + 0,0180 \text{ grammes.}$$

Du reste comme ces corrections n'influencent que très peu le résultat final, j'ai pensé qu'il était superflu de citer tous les détails de chaque expérience dont dépendent les calculs.

Du nombre des franges déplacées par l'évaporation d'un gramme d'eau on peut déduire immédiatement, en vertu de l'équation (5), la valeur de $\frac{(n_{Na}-1)}{D}$ en multipliant ce nombre par 0,003432, et ensuite la constante de réfraction P, qui pour les vapeurs est $\frac{2}{3}\frac{n-1}{D}$, en multipliant le même nombre par 0,002288. De cette manière on obtient pour la vapeur d'eau

$$P_{Na} = 0{,}002288 \cdot 90{,}38 = 0{,}2068.$$

On peut de plus en déduire l'indice de réfraction de la vapeur d'eau correspondant au poids spécifique normal, qui est 9 fois plus grand que celui de l'hydrogène ou 0,0008061, car on sait que $n = 1 + \frac{3}{2} P \cdot D$.

On trouvera

$$n_{Na} = 1{,}0002500.$$

Jamin a de ses expériences sur les interférences dans l'air humide déduit un résultat notablement plus grand, savoir 1,000261, valable pour la lumière blanche.

J'ai trouvé que la dispersion de la vapeur d'eau était plus grande que celle de l'air atmosphérique, mais je n'ai pas réussi à déterminer exactement sa valeur, parce qu'on ne pouvait, à cause de la température assez haute du point d'ébullition, compter en une fois qu'un nombre très limité des franges déplacées.

Quoique la réfraction de l'eau à l'état liquide soit assez bien connue, j'ai cependant fait quelques expériences avec le prisme de la manière indiquée plus haut pour pouvoir contrôler mes mesures par la comparaison des résultats. Les deux expériences faites en des saisons différentes ont donné les résultats suivants.

1. L'angle réfringent ($2p$) du prisme était de 59°43′3″ et la déviation constante ($2a$) 23°48′36″. Dans

e tableau ci-dessous j'ai de plus indiqué la rotation du prisme dans la colonne marquée $2b$.

Dans cette expérience la rotation a été déterminée pour chacune des quatre raies du spectre en particulier, pendant qu'on observait en même temps la température du thermomètre placé à l'intérieur du prisme.

	$2b$	t	n^2	n
Li	15° 4′12″	16°,55	1,771753	1,331072
H_α	14°40′51″	16°,40	1,772669	1,331416
Na	12°20′ 1″	16°.46	1,777692	1,333301
H_β	3°42′10″	16°,36	1,788714	1,337428

2. $2p = 59°42'32''$, $2a = 23°51'2''$.

Les raies ont été observées ensuite de la manière décrite précédemment, et t est la moyenne des deux températures observées immédiatement avant et après l'expérience.

	$2b$	t	n^2	n
Li	15°11′21″	7°,62	1,773020	1,331548
H_α	14°46′15″	7°,62	1,774012	1,331920
Na	12°26′45″	7°,62	1,779035	1,333805
H_β	4° 4′29″	7°,62	1,790067	1,337934

La réduction des indices de réfraction des raies de Li et Na à 10° C. et à 20° C. a été faite par les formules trouvées dans mon premier mémoire, à savoir (voir p. 239)

$$n_{Li}(t) = n_{Li}(0) + 10^{-6}[0{,}952\,t - 2{,}793\,t^2 + 0{,}02134\,t^3],$$
$$n_{Na}(t) = n_{Na}(0) + 10^{-6}[0{,}076\,t - 2{,}803\,t^2 + 0{,}02134\,t^3].$$

Au moyen de ces formules on trouve par les expériences citées ci-dessus

$$n_{Li}(0) = 1{,}331709, \quad n_{Na}(0) = 1{,}333961,$$

ce qui donne pour les températures observées

$$n_{Li}(7^\circ{,}62) = 1{,}331564 \text{ (diff. } 16),$$
$$n_{Li}(16^\circ{,}55) = 1{,}331056 \text{ (diff. } 16),$$
$$n_{Na}(7^\circ{,}62) = 1{,}333808 \text{ (diff. } 3),$$
$$n_{Na}(16^\circ{,}46) = 1{,}333298 \text{ (diff. } 3).$$

On obtient ensuite

$$n_{Li}(10^\circ) = 1{,}331161, \quad n_{Na}(10^\circ) = 1{,}333703,$$
$$n_{Li}(20^\circ) = 1{,}330782, \quad n_{Na}(20^\circ) = 1{,}333012.$$

En ce qui concerne la comparaison des résultats obtenus avec ceux d'autre sobservateurs, je renverrai au premier mémoire, et je me contenterai de faire remarquer que presque tous les observateurs sont d'accord sur le nombre 1,3330 pour $n_{Na}(20^\circ)$.

Si l'on se sert de la détermination du poids spécifique faite par Mathiessen, qui donne $\frac{1}{D} = 1{,}000271$ pour $t = 10^\circ$ et $\frac{1}{D} = 1{,}001814$ pour $t = 20^\circ$, on trouvera les valeurs suivantes de la constante de réfraction définie par $P = \frac{n^2-1}{n^2+2}\frac{1}{D}$:

$$P_{Li}(10^\circ) = 0{,}20489, \quad P_{Na}(10^\circ) = 0{,}20615,$$
$$P_{Li}(20^\circ) = 0{,}20482, \quad P_{Na}(20^\circ) = 0{,}20608.$$

On voit donc que la constante de réfraction diminue très lentement pour des températures croissantes, ce qui est aussi confirmé par les expériences de Rühlmann (Pogg. Ann., t. 132) sur la réfraction de l'eau à diffé-

rentes températures, qui s'étendent jusqu'au point d'ébullition de l'eau. On trouvera en se servant de ces expériences

$$P_{Li}(0^\circ) = 0{,}20490\,,\quad P_{Na}(0^\circ) = 0{,}20614\,,$$
$$P_{Li}(90^\circ) = 0{,}20468\,,\quad P_{Na}(90^\circ) = 0{,}20587\,.$$

Quand l'eau à 100° est transformée en vapeur, la constante de réfraction croît un peu, car on a trouvé ci-dessus $P_{Na} = 0{,}2068$, mais on reconnaît qu'en somme la constante de réfraction de l'eau ne varie que remarquablement peu avec la température et par sa transformation en vapeur.

Mascart a par la méthode des interférences (C. R., t. 79, p. 801) déterminé la variation de la réfraction de l'eau produite par la pression. Les expériences révèlent une variation de la réfraction, qui est de 12,5 pour 100 plus petite qu'elle ne le serait si la constante de réfraction restait invariable. Pour cette raison on doit supposer que cette constante croît avec le volume par diminution de la pression extérieure.

L'indice de réfraction de la glace a été déterminé avec précision par Reusch (Pogg. Ann., t. 121), qui a trouvé pour l'indice de réfraction du rayon ordinaire $n_o = 1{,}30598$ et pour celui du rayon extraordinaire $n_e = 1{,}30734$, indices correspondant tous deux à la lumière rouge transmise par le verre de cobalt. Au moyen de ces valeurs on a calculé en premier lieu $n^2 = \frac{1}{3}(2n_o^2 + n_e^2)$; puis en supposant le poids spécifique de la glace égal à 0,91674 (Bunsen), on a obtenu la valeur 0,20804 de la constante de réfraction de la lumière rouge. Ici encore cette constante est augmentée par la dilatation.

La dispersion des liquides dont on a cherché la réfraction pour les raies de Na et de Li est définie par $\alpha = \frac{P_{Na} - P_{Li}}{P_{Na}}$, qui pour les gaz et les vapeurs est identique à $\frac{n_{Na} - n_{Li}}{n_{Na} - 1}$. Pour l'eau on trouve

$$\alpha = 0{,}00611\,,$$

nombre valable tant pour 10° que pour 20°. Mes recherches précédentes font au contraire voir que la dispersion croît considérablement dans le voisinage du point de congélation.

6. *Alcool.* C_2H_6O.

Les expériences sur la vapeur d'alcool ont donné les résultats suivants:

G	S	N
3,2850 + 0,0121	407 + 0,42	123,57
2,7461 + 0,0163	340 + 0,70	123,34
6,0595	748,12	123,46

et par conséquent un déplacement de 123,46 franges jaunes pour chaque gramme de vapeur. On en peut déduire

$$P_{Na} = 0{,}002288 \cdot 123{,}46 = 0{,}2825\,.$$

Au déplacement de 79 franges jaunes correspondait celui de 69 franges rouges, d'où l'on conclut

$$P_{Li} = 0{,}2810 \quad \text{et} \quad \alpha = 0{,}00522\,.$$

On en déduit l'indice de réfraction de la vapeur correspondant au poids spécifique normal, qui est 23

s plus grand que celui de l'hydrogène, c'est-à-dire égal)0,002060,

$$n_{Na} = 1{,}0008729, \quad n_{Li} = 1{,}0008683.$$

Les expériences sur l'alcool à l'état liquide ont donné résultats suivants:

1. $2p = 59°42'12''$, $2a = 26°30'0''$.

	$2b$	t	n^2
Li	19°28'31"	19°,28	1,850806
H_α	19 10'46"	19 ,28	1,851811
Na	17 11'12"	19 ,28	1,856636
H_β	13 27'14"	19°,28	1,868312

2. $2p = 59°43'18''$, $2a = 26°17'31''$.

	$2b$	t	n^2
Li	14 52'28"	13 ,30	1,857198
H_α	14 28'24"	13 ,30	1,858212
Na	12 21'53"	13 ,31	1,863100
H_β	4 53'12"	13 ,17	1,874991

Pour faire la comparaison avec les observations de Wüllner et de Landolt (Pogg. Ann., t. 133 et 122), on en déduira

n_α (19°,28) 1,360811 (W. 1,36061, L. 1,36083),

n_β (19 ,28) 1,365862 (W. 1,36701, L. 1,36636),

n_α (13°,30) 1,36310 (W. 1,363257, L. 1,36328),

n_β (13 ,17) 1,365463 (W. 1,369138, L. 1,36918).

On voit que les valeurs de l'indice de réfraction trouvées par moi sont en général plus petites que celles de Landolt et de Wüllner.

En réduisant à 10° et à 20°, on obtient

* NOTE 7. $n^2_{Li}(10°) = 1{,}860728, \quad n^2_{Na}(10°) = 1{,}866673,$ *

$n^2_{Li}(20°) = 1{,}850049, \quad n^2_{Na}(20°) = 1{,}855879.$

On a trouvé que le poids spécifique était à 0° C. 0,7993 (Wüllner 0,8043) et à 20° C. 0,7909 (Wüllner 0,7958, Landolt 0,7996). D'après Mendeleyeff (Pogg. Ann., t. 138) les poids spécifiques à ces mêmes températures sont 0,79788 et 0,78945. On aura donc pour l'alcool dont je me suis servi

$P_{Li}(10°) = 0{,}27892, \quad P_{Na}(10°) = 0{,}28042,$

$P_{Li}(20°) = 0{,}27917, \quad P_{Na}(20°) = 0{,}28066,$

et le quotient de dispersion aux mêmes températures

$\alpha(10°) = 0{,}00535, \quad \alpha(20°) = 0{,}00531.$

Les constantes de réfraction ne varient donc que très peu par l'accroissement de température et par la transformation du liquide en vapeur. On trouve cependant un accroissement appréciable dans les deux cas. Le quotient de dispersion est également presque constant, mais il semble pourtant qu'il varie un peu en sens inverse.

7. *Éther.* $C_4H_{10}O$.

Les expériences sur la vapeur d'éther ont donné les résultats suivants:

G	S	s
2,3146 + 0,0124	312,25	134,17
3,1298 + 0,0147	420,8 + 0,75	134,06
2,9338 + 0,0150	394,5 + 0,77	134,04
8,4203	1129,07	134,09

On en déduit

$$P_{Na} = 0{,}002288 \cdot 134{,}09 = 0{,}3068 .$$

A un déplacement de 119 franges jaunes répondait celui de 104 franges rouges, et dans une autre expérience 111 franges jaunes à 97 rouges. On a par conséquent

$$P_{Li} = 0{,}3054 , \quad \alpha = 0{,}00465 .$$

On trouve par là que l'indice de réfraction correspondant au poids spécifique normal, qui est 37 fois plus grand que celui de l'hydrogène, c'est-à-dire égal à 0,003314, est

$$n_{Na} = 1{,}001525 , \quad n_{Li} = 1{,}001517 .$$

Dulong a trouvé que la réfraction de la vapeur d'éther était 5,197 fois plus grande que celle de l'air, ce qui correspond à $n_{Na} = 1{,}001512$, valeur qui concorde assez bien avec le résultat trouvé ci-dessus.

J'ai encore fait quelques expériences sur la réfraction de la vapeur d'éther à la température ordinaire, qui était de 20° C. (environ). En voici les résultats:

G	S	s
2,233 + 0,014	300 + 0,77	133,85
2,971 + 0,013	399 + 0,63	133,92
5,231	700,40	133,90

A un déplacement de 95 franges jaunes correspondait celui de 83 franges rouges. Il en résulte que la constante de réfraction et le quotient de dispersion ne varient pas d'une manière appréciable par une variation

de température entre 100° C. et 20 C., car
écarts qu'ont donnés les expériences tombent
limites des erreurs d'observation.

Pour l'éther liquide j'ai trouvé:

1. $2p = 59°43'1''$, $2a = 25°30'0''$.

	$2b$	t	n^2	n^2 cal
Li	17°47'38"	21°,53	1,822033	[illegible]
—	17°37'59"	21°,31	1,822519	[illegible]
H_α	17°29'49"	21°,53	1,822919	[illegible]
—	17°20'34"	21°,31	1,823374	[illegible]
Na	15°48' 9"	21°,53	1,827702	[illegible]
—	15°37'25"	21°,31	1,828179	[illegible]
H_β	10°37'41"	21°,53	1,839654	[illegible]
—	10°21'51"	21°,31	1,839824	[illegible]

2. $2p = 59°43'13''$, $2a = 25°52'1''$.

	$2b$	t	n^2	n^2 cal
Li	14°34'19"	8°,00	1,843435	[illegible]
H_α	14°12'28"	8°,00	1,844340	[illegible]
Na	12° 1'25"	8°,00	1,849296	[illegible]
H_β	2°39' 9"	8°,00	1,861252	[illegible]

Les valeurs calculées de n^2 sont déduites de la

$$n_\lambda^2 = 1,813050 - 0,001532(t - 15) + (0,036365 - 0,00007 \ldots$$

où λ_β est la longueur d'onde correspondant à
une longueur d'onde arbitraire. Dans les calc
première série d'expériences on a corrigé la v
la température 21°,53 en 21°,61.

Landolt a trouvé

$$n_\alpha = 1{,}35112 - 0{,}00058\,(t - 20),$$
$$n_\beta = 1{,}35720 - 0{,}00059\,(t - 20),$$

tandis que la formule ci-dessus donne approximativement

$$n_\alpha = 1{,}351090 - 0{,}000582\,(t - 20),$$
$$n_\beta = 1{,}357182 - 0{,}000592\,(t - 20),$$

ce qui est presque complètement en concordance avec les formules de Landolt. De la même formule on peut déduire en outre

$$n^2_{Li}(10^\circ) = 1{,}810292, \quad n^2_{Na}(10^\circ) = 1{,}846112,$$
$$n^2_{Li}(20^\circ) = 1{,}824563, \quad n^2_{Na}(20^\circ) = 1{,}830261.$$

Le poids spécifique était à 10° égal à 0,7269 (Kopp 0,7256) et à 20° à 0,7157 (Landolt 0,7153, Kopp 0,7143). On a donc

$$P_{Li}(10^\circ) = 0{,}30102, \quad P_{Na}(10^\circ) = 0{,}30261,$$
$$P_{Li}(20^\circ) = 0{,}30124, \quad P_{Na}(20^\circ) = 0{,}30287,$$
$$\alpha(10^\circ) = 0{,}00537, \quad \alpha(20^\circ) = 0{,}00538.$$

Si l'on compare ces valeurs avec les valeurs analogues pour la vapeur, on reconnait que les résultats, en ce qui concerne la variation de la constante de réfraction et du quotient de dispersion, sont identiques à ceux que nous avons trouvés pour l'alcool.

8. *Chloroforme.* $CHCl_3$.

Les expériences sur la vapeur de chloroforme ont donné les résultats suivants:

G	S	s
6,8434 + 0,0190	538 + 0,19	78,43
6,0939 + 0,0186	480 + 0,19	78,56
12,9749	1018,38	78,49

d'où l'on déduit

$$P_{Na} = 0,1796.$$

A un déplacement de 79 franges jaunes correspond celui de 69 franges rouges. Par conséquent on aura

$$P_{Li} = 0,1787, \quad \alpha = 0,00522.$$

L'indice de réfraction correspondant à un poids spécifique 59,75 fois plus grand que celui de l'hydrogène, c'est-à-dire égal à 0,005352, est

$$n_{Na} = 1,001442, \quad n_{Li} = 1,001435.$$

Pour le chloroforme liquide, on a trouvé:

1. $2p = 59°43'0''$, $2a = 33°0'0''$,

	$2b$	t	n^2
Li	16° 0'30"	19°,17	2,084171
H_α	15°37'10"	19°,17	2,085544
Na	13°19'55"	19°,17	2,092927
H_β	3°58'27"	19°,17	2,111085

2. $2p = 59°42'9''$, $2a = 33°30'29''$,

	$2b$	t	n^2
Li	15°49'59"	8°,23	2,102627
H_α	15°26'30"	8°,23	2,104012*
Na	13° 6'10"	8°,23	2,111578
H_β	2°49' 9"	8°,23	2,130242

* NOTE 8.

On déduit de là

$n_\alpha(20°) = 1,443657$ (Haagen [Pogg., t. 131] 1,44403),
$n_\beta(20°) = 1,452458$ (H. 1,45294),

$n^2_{Li}(10°) = 2,099641$, $n^2_{Na}(10°) = 2,108562$,
$n^2_{Li}(20°) = 2,082771$, $n^2_{Na}(20°) = 2,091512$.

Le poids spécifique à 10° était 1,5072 (Pierre 1,50786), à 20° 1,4896 (Pierre 1,48977, Haagen 1,4904), et par conséquent

$$P_{Li}(10°) = 0,17797, \quad P_{Na}(10°) = 0,17902,$$
$$P_{Li}(20°) = 0,17804, \quad P_{Na}(20°) = 0,17909,$$
$$\alpha(10°) = 0,00592, \quad \alpha(20°) = 0,00592.$$

Les lois relatives à la constante de réfraction et à la dispersion sont les mêmes que pour les deux corps précédents.

9. Iodure d'éthyle. C_2H_5I.

Les expériences sur la vapeur d'iodure d'éthyle ont donné les résultats suivants:

G	S	s
3,8374 + 0,0156	264	68,52
5,1430 + 0,0182	357	69,17
4,2470 + 0,0180	290,5	68,11
13,2792	911,5	68,66

d'où l'on conclut

$$P_{Na} = 0,1571.$$

A un déplacement de 85 franges jaunes répondait celui de 74 franges rouges, et par suite

$$P_{Li} = 0,1558, \quad \alpha = 0,00844.$$

L'indice de réfraction de la vapeur correspondant au poids spécifique 78 fois plus grand que celui de l'hydrogène, c'est-à-dire égal à 0,006987, est

$$n_{Na} = 1{,}001646\,, \quad n_{Li} = 1{,}001632.$$

Pour l'iodure d'éthyle liquide on a trouvé:

9. 1. $2p = 59°43'5''$, $2a = 38°58'51''$*.

	$2b$	t	n^2
Li	19°46'41"	19°,66	2,270410
H_α	19°17'40"	19°,66	2,272891
Na	16°18' 0"	19°,66	2,286931
H_β	1°27'53"	19°,66	2,321976

2. $2p = 59°43'10''$, $2a = 39°38'42''$.

	$2b$	t	n
Li	19°59'25"	9°,60	2,291406
"	20° 8'30"	9°,94	2,290595
H_α	19°31'30"	9°,60	2,293861
"	19°39'38"	9°,94	2,293151
Na	16°35'39"	9°,60	2,308041
"	16°45'50"	9°,94	2,307281
H_β	2°56'35"	9°,60	2,344109
"	3°42' 6"	9°,94	2,343423

On en déduit $n_\alpha(20°) = 1{,}50738$ (poids spéc. 1,9264, Haagen 1,50812 [poids spéc. 1,9315] et 1,50868 [poids spéc. 1,9345]), $n_\beta(20°) = 1{,}52356$ (Haagen 1,5244 et 1,52509), et

$$n^2_{Li}(10°) = 2{,}29052\,, \quad n^2_{Na}(10°) = 2{,}30718,$$
$$n^2_{Li}(20°) = 2{,}26972\,, \quad n^2_{Na}(20°) = 2{,}28623.$$

On a trouvé que le poids spécifique était à 10° égal à 1,9491 (Pierre 1,9528) et à 20° à 1,9264 (Pierre 1,9298).

Par suite on aura

$$P_h(10^\circ) = 0{,}15432,\quad P_{Na}(10^\circ) = 0{,}15571,$$
$$P_h(20^\circ) = 0{,}15437,\quad P_{Na}(20^\circ) = 0{,}15578,$$
$$\alpha(10^\circ) = 0{,}00893,\quad \alpha(20^\circ) = 0{,}00905.$$

Ici se présentent donc précisément les mêmes particularités que dans le cas des corps précédents.

10. *Sulfure de carbone.* CS_2.

Les expériences sur la vapeur de sulfure de carbone ont donné les résultats suivants:

G	S	s
2,3823 + 0,0150	304 + 0,87	127,17
3,7418 + 0,0137	476 + 0,64	126,92
1,0070 + 0,0124	128 + 0,70	126,3
2,8128 + 0,0148	356 + 0,78	126,18
3,9446 + 0,0144	500 + 0,70	126,47
13,9585	1767,69	126,64

d'où l'on conclut

$$P_{Na} = 0{,}2898.$$

A un déplacement de 97 franges jaunes répondait celui de 84 franges rouges, et par conséquent

$$P_h = 0{,}2858,\quad \alpha = 0{,}01369.$$

On a trouvé précisément le même quotient de dispersion par une expérience sur la vapeur de sulfure de carbone à 20° (environ).

L'indice de réfraction de la vapeur pour un poids

spécifique 38 fois plus grand que celui de l'hydrogène, c'est-à-dire égal à 0,003404, est

$$n_{Na} = 1,001480, \quad n_{Li} = 1,001460.$$

Dulong a trouvé que la réfraction était 5,110 fois plus grande que celle de l'air atmosphérique, et que par conséquent $n_{Na} = 1,001487$.

Pour le sulfure de carbone liquide on a trouvé:

1. $2p = 59°43'0''$, $2a = 51°29'52''$.

	$t = 20°,52$		$t = 20°,34$		$t = 20°,12$	
	$2b$	n^2	$2b$	n^2	$2b$	n^2
Li	27°51'18"	2,612635	27°46'23"	2,613410	27°42'19"	2,614050
H_α	27°17'11"	2,617971	27°11'55"	2,618785	27° 8' 9"	2,619366
Na_1	23°49' 7"	2,648288	23°43'50"	2,649008	23°39'35"	2,649585
Na_2	23°46'16"	2,648677	23°41'12"	2,649366	23°36'56"	2,649944
H_β	9°53'59"	2,729920	9°41' 5"	2,730662	9°30'29"	2,731259

1. $2p = 59°43'13''$, $2a = 51°52'40''$.

	$t = 10°,63$		$t = 11°,01$	
	$2b$	n^2	$2b$	n^2
Li	26°20'13"	2,638073	26°26' 0"	2,637198
H_α	25°43'55"	2,643494	25°49'42"	2,642638
Na_1	22° 0'19"	2,674274	22° 5'27" (Na₁, Na₂)	2,673618
Na_2	21°57'34"	2,674624		
H_β	3°21'45"	2,757474	4° 0'32"	2,756625

On en déduit

$n_\alpha(10°) = 1{,}626396$ (Wüllner 1,626266, Willigen 1,62657),
$n_\alpha(20°) = 1{,}618503$ (Wüllner 1,618466, Willigen 1,61841),
$n_\beta(10°) = 1{,}661123$ (Wüllner 1,660876, Willigen 1,66127),
$n_\beta(20°) = 1{,}652734$ (Wüllner 1,653676, Willigen 1,65273).

Les déterminations citées de v. d. Willigen se trouvent dans le „Musée Teyler" III(1). De plus on a

$$n^2_{Li}(10°) = 2{,}639728, \quad n^2_{Na}(10°) = 2{,}676180,$$
$$n^2_{Li}(20°) = 2{,}614208, \quad n^2_{Na}(20°) = 2{,}650009^*.$$ * NOTE 10.

Le poids spécifique était à 10° égal à 1,2778 (Wüllner 1,27860, Pierre 1,27831), et à 20° à 1,2634 (W. 1,26354, P. 1,26344), d'où l'on conclut

$$P_{Li}(10°) = 0{,}27658, \quad P_{Na}(10°) = 0{,}28052,$$
$$P_{Li}(20°) = 0{,}27690, \quad P_{Na}(20°) = 0{,}28086,$$
$$\alpha(10°) = 0{,}01405, \quad \alpha(20°) = 0{,}01410.$$

Les variations de la constante de réfraction et de la dispersion sont donc analogues à celles des corps précédents; ces variations sont pourtant plus grandes ici.

11. *Acétate d'éthyle.* $C_4H_8O_2$.

Les expériences sur la vapeur d'acétate d'éthyle ont donné les résultats suivants:

G	S	s
3,295 + 0,0218	388 + 0,91	117,25
2,971 + 0,0218	350,5 + 0,93	117,43
2,2448 + 0,0218	264,5 + 0,98	117,13
8,5762	1005,82	117,28

d'où l'on déduit

$$P_{Na} = 0{,}2683.$$

Au déplacement de 55,5 franges jaunes correspond celui de 48,5 franges rouges, et par conséquent

$$P_{Li} = 0{,}2670, \quad \alpha = 0{,}00170.$$

L'indice de réfraction de la vapeur correspondant à un poids spécifique 44 fois plus grand que celui de l'hydrogène, c'est-à-dire égal à 0,003911, est

$$n_{Na} = 1{,}001586, \quad n_{Li} = 1{,}001578.$$

Pour l'acétate d'éthyle liquide j'ai trouvé:

1. $2p = 59°43'14''$, $2a = 26°54'55''$.

	$2b$	t	n^2
Li	15°24' 7"	18°,48	1,877196
"	15°29' 5"	18°,60	1,876967
H_α	14°57' 9"	18°,22	1,878123
"	14°58'58"	18°,27	1,878312
Na	12°58'40"	18°,40	1,883392
"	12°57'21"	18°,36	1,883410
H_β	5°24'37"	18°,12	1,895991

2. $2p = 59°43'48''$, $2a = 27°15'31''$.

	$2b$	t	n^2
Li	14°41'21"	8°,59	1,890809
H_α	14°20'44"	8°,59	1,891715
Na	12° 0'45"	8°,33	1,897309
H_β	3°32'13"	8°,59	1,906656
"	2°52'23"	8°,33	1,909747 *

On en conclut

* NOTE 11.

$$n_{\alpha}(20°) = 1{,}369656 \text{ (Landolt } 1{,}37086),$$
$$n_{\beta}(20°) = 1{,}375991 \text{ (Landolt } 1{,}37709),$$
$$n^2_{Li}(10°) = 1{,}888863, \quad n^2_{Na}(10°) = 1{,}895101,$$
$$n^2_{Li}(20°) = 1{,}875070, \quad n^2_{Na}(20°) = 1{,}881177.$$

Le poids spécifique à 20° était 0,8906 (Kopp 0,8870, Landolt 0,9005).

Comme je n'ai fait aucune détermination du poids spécifique à des températures plus basses, je l'ai calculé au moyen du coefficient de dilatation donné par Kopp, et de cette manière j'ai trouvé qu'à 10° il est égal à 0,9024. Pour cette valeur on trouvera

$$P_{Li}(10°) = 0{,}25329, \quad P_{Na}(10°) = 0{,}25466,$$
$$P_{Li}(20°) = 0{,}25356, \quad P_{Na}(20°) = 0{,}25493,$$
$$\alpha(10°) = 0{,}00537, \quad \alpha(20°) = 0{,}00537.$$

Les mêmes remarques qu'on a faites ci-dessus relativement à la constante de réfraction et à la dispersion pour le sulfure de carbone sont donc valables ici.

12. *Ammoniaque.* NH_3.

Le gaz ammoniac était dégagé par la petite cucurbite, qui était remplie en partie d'eau fortement ammoniacale; de là il était amené par un tube à potasse dans le réservoir intérieur. La cucurbite et le tube ont été pesés avant et après l'expérience. L'appareil avait la température de l'air ambiant, environ 20° C. Voici les résultats:

G	S	s
0,647	92	112,2
0,591	85	113,1
1,3105	187	112,7
1,049	150	113,0
3,6005	514	112,76

On en conclut

$$P_{Na} = 0,3266.$$

Au déplacement de 39 franges jaunes correspond celui de 31 franges rouges, et on aura par conséquent

(15) $$P_{Li} = 0,3250, \quad n = 0,00178^{1)}.$$

Au poids spécifique 8,5 fois plus grand que celui de l'hydrogène, c'est-à-dire égal à 0,0007613, correspondent les indices de réfraction

(16) $$n_{Na} = 1,0003730, \quad n_{Li} = 1,0003712^{2)}.$$

Dulong a trouvé que l'indice de réfraction de l'ammoniaque était 1,309 fois plus grand que celui de l'air atmosphérique et qu'on a par conséquent $n_{Na} = 1,000385$, ce qui est complètement en concordance avec le résultat trouvé par Arago et Biot. La valeur plus petite que donnent mes expériences est peut-être due à un transport de vapeur d'eau dans le réservoir intérieur, car le tube à potasse était assez petit; mais quoique je me méfie de ma détermination de l'indice de réfraction de l'ammoniaque, je n'ai pourtant pas omis de la citer parce qu'elle constate un fait théoriquement remarquable.

La constante de réfraction P peut, comme on sait, être calculée approximativement pour un mélange de liquides par la formule

$$(p_1+p_2+\dots+p_n)P = p_1P_1+p_2P_2+\dots+p_nP_n,$$

où p_1, p_2, ..., p_n sont les poids des éléments du mélange et P_1, P_2, ..., P_n leurs constantes de réfraction. Cette formule exprime essentiellement la même loi pour les gaz que celle que Biot et Arago ont les premiers énoncée. Dulong a calculé la variation de l'indice de réfraction produite par la combinaison chimique des éléments d'un mélange de gaz et il a trouvé que l'indice de réfraction était souvent diminué par cette combinaison, mais qu'il y avait aussi des cas où il était augmenté, savoir dans le cas des gaz chloroxycarbonique, vapeur d'eau, protoxyde d'azote, bioxyde d'azote et ammoniac. En ce qui concerne l'eau, Dulong s'appuya sur les indications de Biot et Arago, d'après lesquelles la réfraction de la vapeur d'eau était égale à celle de l'air ou très peu inférieure; mais on obtiendra un résultat tout différent par la réduction considérable qui résulte de mes expériences: c'est-à-dire que pour un mélange d'un poids 1 d'hydrogène et d'un poids 8 d'oxygène on obtiendra la constante de réfraction

$$P_{Ya} = \tfrac{1}{9}\cdot 1{,}0325+\tfrac{8}{9}\cdot 0{,}12666 = 0{,}2273,$$

tandis que celle de l'eau est 0,2068, valeur qui, comme on voit, est notablement plus petite.

En ce qui concerne les deux oxydes d'azote, l'indication de Dulong est sans doute juste, car elle s'appuie sur les excellentes expériences faites par lui-même et de plus elle est complètement confirmée par les résultats trouvés par Mascart, mais on remarquera que la formation de ces deux combinaisons est précisément accompagnée d'une absorption de chaleur. Pour cette raison il était naturel de supposer que la réfraction d'un mélange de gaz diminue, s'ils se combinent chimique-

ment en développant de la chaleur, et qu'elle augmente si une absorption de chaleur accompagne leur combinaison. A cette règle l'ammoniaque fait cependant exception. Pour un mélange d'un poids 14 d'azote avec un poids 3 d'hydrogène, on trouvera la constante de refraction

$$P_{Na} = \frac{14}{17}\cdot 0{,}1571 + \frac{3}{17}\cdot 1{,}0325 = 0{,}3116,$$

tandis que pour l'ammoniaque elle est 0,3336 d'après les expériences de Dulong et celles de Biot et Arago, et 0,3266 d'après les expériences citées ci-dessus. On ne peut donc pas douter que la refraction de la combinaison chimique ne soit ici plus grande que celle du mélange; et d'autre part on sait, tant par les expériences de Thomsen que par celles de Favre, que la formation de l'ammoniaque par combinaison de l'azote et de l'hydrogène est même accompagnée d'un développement considérable de chaleur.

Le petit nombre d'expériences qu'on a faites jusqu'ici sur la refraction des vapeurs et des liquides correspondants est mentionné dans ce qui précède, à l'exception des expériences de Ketteler sur l'acide sulfureux. Il s'est glissé dans celles-ci une erreur qui amène à des conclusions inacceptables: car Ketteler indique que le poids spécifique de l'acide sulfureux liquide est „d'après Pierre" 1,4821 à la température des expériences, qui était de 24°,1 C. Au moyen de la formule de Pierre (Ann. de chim. et pharm., t. 21), qui n'est valable que pour des températures plus basses que −8° C., on trouvera le poids spécifique 1,4882 à −10° C. Si l'on

se sert ensuite des coefficients de dilatation indiqués par Drion (Ann. de chim., t. 56; Pogg. Ann., t. 105) pour les plus hautes températures, on trouvera à 24°,1 le poids spécifique 1,36726. D'après Andréef, ce poids spécifique est 1,36640 (Liebigs Ann., t. 110): et si l'on prend la moyenne des deux valeurs, on obtiendra 1,3668, qui est notablement plus petit que le nombre indiqué par Ketteler. A la température citée Ketteler a trouvé $n_{Li} = 1{,}33574$ et $n_{Na} = 1{,}33835$, d'où l'on déduira

$$P_{Li} = 0{,}15162, \quad P_{Na} = 0{,}15268, \quad \alpha = 0{,}00700.$$

Pour l'acide sulfureux gazeux, il indique de plus

$$n_{Li} = 1{,}00068155, \quad n_{Na} = 1{,}00068601.$$

Mascart a trouvé $n_{Na} = 1{,}0006820$, tandis que les expériences de Dulong ont donné un résultat notablement plus petit, savoir 1,0006578.

Des expériences de Ketteler on peut déduire, en supposant que le poids spécifique de l'acide sulfureux gazeux est 32 fois plus grand que celui de l'hydrogène à la pression et à la température normales, c'est-à-dire égal à 0,002866,

$$P_{Li} = 0{,}1586, \quad P_{Na} = 0{,}1596, \quad \alpha = 0{,}00650,$$

et des expériences de Dulong

$$P_{Na} = 0{,}1530.$$

Ici se répète pour l'acide sulfureux la même remarque que j'ai faite pour tous les corps examinés par moi, à savoir que la constante de réfraction croît et que le quotient de dispersion diminue (l'un et l'autre très peu toutefois) par la transformation du liquide en vapeur.

Le tableau ci-dessous contient les constantes de réfraction pour la raie de *Na* et les quotient de dispersion pour les raies de *Na* et *Li* correspondants aux températures de 10° et 20° pour les liquides et de 100° C. pour les vapeurs*.

* NOTE II.

	10°	20°	100°	10°	20°	100°
Eau	0,20615	0,20608	0,208	0,00641	0,00641	
Alcool	0,28042	0,28066	0,2825	[illegible]	[illegible]	[illegible]
Ether	0,30264	0,30287	0,3068	[illegible]	[illegible]	0,00465
Chloroforme . .	0,17902	0,17900	0,1796	[illegible]	[illegible]	[illegible]
Iodure d'ethyle	0,15571	0,15578	0,1571	[illegible]	[illegible]	0,00844
Sulfure de carbone	0,28052	0,28086	0,2808	0,01466	0,01416	0,01364
Acetate d'ethyle	0,25466	0,25493	0,2682	[illegible]	[illegible]	[illegible]

NOTES.

NOTE 1. Un résumé de ce mémoire se trouve dans les Wiedemann Ann., t. XI, p. 70—103.

La plupart des notes ajoutées à ce mémoire consistent en des corrections aux calculs numériques. Je n'ai pourtant fait aucune correction quand l'erreur n'excède pas quelques unités du dernier ordre décimal. J'ai partout fait la correction sous forme de note, à moins que l'erreur ne fût évidemment une faute typographique, auquel cas j'ai fait la correction dans le texte même.

NOTE 2. On pose ici

$$n_{Na} = 1{,}00029.$$

(Voir page 323).

NOTE 3. Les nombres 738,34 et 155,50 ne concordent pas. C'est vraisemblablement 738,34 qui est incorrect et qui doit être remplacé par 748,34, car à ce dernier nombre correspond $s = 155{,}51$.

NOTE. 4. Les calculs ne peuvent pas être contrôlés, car Lorenz ne cite pas la valeur du rapport (environ 0,21) des volumes de l'oxygène et de l'azote dans l'air atmosphérique.

NOTE 5. Mes calculs donnent 73,547.

NOTE 6. On fait ici la supposition que tout l'air contenu dans la cucurbite passe dans le réservoir. Du

reste on ne peut pas contrôler les calculs, puisqu'on ne sait pas la pression de l'air extérieur.

NOTE 7. Ici comme dans tout le reste du mémoire à moins qu'une formule particulière n'y soit invoquée, le calcul des valeurs de $n^2_{Li}(10)$, $n^2_{Li}(20)$, etc., a été fait en se servant ou d'une simple interpolation ou d'une formule $n^2 = a + bt$, où les constantes a et b sont déterminées par la méthode des moindres carrés.

NOTE 8. Le calcul donne 2,104009.

NOTE 9. Les résultats de Lorenz doivent ici (pour $2p = 59°43'5''$, $2a = 38°58'51''$) être diminués de 0,000013. Vraisemblablement il s'est glissé une erreur dans le calcul de n_0.

NOTE 10. Mes calculs des valeurs des indices n_α, n_β, n^2_{Li}, n^2_{Na} donnent des résultats qui diffèrent par les unités du dernier ordre décimal de ceux de Lorenz.

NOTE 11. Les calculs ne sont pas exacts, car les valeurs de $2b$ et de n^2 ne concordent pas. Les valeurs indiquées pour $2p$, $2a$ et $2b$ donneraient

$$n^2_{Li} = 1,890718,$$
$$n^2_{H_\alpha} = 1,891628,$$
$$n^2_{Na} = 1,897248,$$
$$n^2_{H_\beta} = 1,909351,$$
$$\text{"} = 1,909743.$$

Vraisemblablement une erreur s'est glissée dans le calcul de $\frac{n_0^2 - 1}{\cos^2 p}$ (voir formule (7)).

Par suite les valeurs de $n_\alpha(20°)$, $n_\beta(20°)$, etc., ne sont plus exactes.

NOTE 12. On trouvera

$$P_{Li} = 0{,}3213, \quad a = 0{,}00701.$$

NOTE 13. On trouvera, d'après la valeur de P_{Li} donnée dans la note 17,

$$n_{Li} = 1{,}0003702.$$

NOTE 14. Les valeurs de P_{Na} et de a relatives à 100° ne correspondent qu'aux vapeurs des corps.

Du reste on doit remarquer que les valeurs de a sont très incertaines. Car la différence $P_{Na} - P_{Li}$ est toujours très petite et ne dépend en général que de la valeur du dernier chiffre de ces nombres. Mais, comme P_{Na} est calculé par la formule

$$P_{Na} = 0{,}002288 \cdot s,$$

on ne peut pas attendre que plus de quatre chiffres du résultat soient exacts. Par conséquent on ne peut regarder comme exact qu'un seul chiffre dans la valeur de a.

SUPPLÉMENT AUX DEUX MÉMOIRES:

„RECHERCHES EXPÉRIMENTALES ET THÉORIQUES SUR LES INDICES DE RÉFRACTION.“

Dans un mémoire ayant pour titre „Ueber die Refractionsconstante“ et inséré dans le tome XI des Annales de Wiedemann, Lorenz a donné un résumé des deux mémoires intitulés „Recherches théoriques et expérimentales sur les indices de réfraction“. Dans ce résumé il a dans une certaine mesure modifié et facilité les considérations théoriques du premier des mémoires en question, et pour cette raison je citerai les développements mathématiques de ce résumé.

Lorenz suppose que le corps considéré est homogène et isotrope, et en faisant les mêmes hypothèses sur la périodicité des vibrations lumineuses et sur celle de la structure du corps (voir p. 257) que dans le mémoire cité, il déduit des équations fondamentales

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}-\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}-\frac{\partial \xi}{\partial z}\right)&=\frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2},\\
\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \eta}{\partial z}-\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}-\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)&=\frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2},\\
\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}-\frac{\partial \xi}{\partial z}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \eta}{\partial z}-\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)&=\frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2},
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

s équations

$$\left.\begin{aligned} \xi &= (\xi_0 - \xi_2)C + \xi_1 S, \\ \eta &= (\eta_0 - \eta_2)C + \eta_1 S, \\ \zeta &= (\zeta_0 - \zeta_2)C + \zeta_1 S, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$\xi_2 = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad \eta_2 = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad \zeta_2 = \frac{\partial F}{\partial z}, \tag{3}$$

, en supposant η_0 et ζ_0 et par conséquent l égal à zéro,

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\omega^2}\left(\xi_0 - \frac{\partial F}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{\omega^2}\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{\omega^2}\frac{\partial F}{\partial z} = 0, \tag{4}$$

$$\int \frac{dv}{v}\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad \int \frac{dv}{v}\frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad \int \frac{dv}{v}\frac{\partial F}{\partial z} = 0. \tag{5}$$

En désignant par A l'indice de réfraction réduit, il ouve

$$(A^2 - 1)\xi = \int \frac{dv}{v}\varsigma^4\left(\xi_0 - \frac{\partial F}{\partial x}\right). \tag{6}$$

Jusqu'ici les développements sont identiques à ceux n premier mémoire, mais à partir de là ils commencent différer.

Lorenz fait à présent l'hypothèse que le corps est ompose de molécules sphériques, qui ont toutes le même yon s et qui sont séparées par le vide ou du moins par milieu où la lumière a la même vitesse que dans vide. Dans cette hypothèse il désigne par $\int^{(i)}$ une intéale qui s'étend seulement aux molécules du corps et ar $\int^{(e)}$ une intégrale qui s'étend seulement aux intervalles s molécules.

Soient de plus v_i le volume des molécules, v_e celui s intervalles; on aura

et en vertu des équations (5)

$$\int^{(e)}\frac{dv}{v_e}\frac{\partial F}{\partial x} = -\int^{(i)}\frac{dv}{v_e}\frac{\partial F}{\partial x}. \tag{7}$$

Si l'on désigne par c cette quantité, et si l'on pose

$$F = cx + (c + \xi_0)\varphi, \tag{8}$$

on aura

$$\int^{(e)}\frac{dv}{v_e}\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0 \quad \text{et} \quad \int^{(i)}\frac{dv}{v}\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{c}{c+\xi_0}. \tag{9}$$

L'équation (6) donnera alors

$$(A^2 - 1)\left(1 + \int^{(i)}\frac{dv}{v}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) = \int^{(i)}\frac{dv}{v}\psi\left(1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right). \tag{10}$$

Le problème à résoudre est à présent de trouver une relation entre les deux intégrales qui entrent dans l'équation précédente.

On aura en vertu de l'équation (4)

$$\frac{\partial}{\partial x}(1+\psi)\left(1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}(1+\psi)\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}(1+\psi)\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0. \tag{11}$$

Nous prendrons le centre d'une molécule sphérique pour l'origine des coordonnées et nous désignerons les coordonnées rectangulaires d'un point situé à l'intérieur de la molécule par x_1, y_1, z_1 et ses coordonnées sphériques par $R_1\cos\theta_1$, $R_1\sin\theta_1\cos\omega_1$, $R_1\sin\theta_1\sin\omega_1$, tandis que les coordonnées d'un point extérieur seront designées par x', y', z' et par $R'\cos\theta'$, $R'\sin\theta'\cos\omega'$, $R'\sin\theta'\sin\omega'$. Nous désignerons de plus le diamètre de la molécule par 2ε et la distance moyenne de deux molécules voisines par $2e$, quantité qui est définie plus précisément par

$v = \frac{4}{3}\pi c^3 N$, où N est le nombre des molécules contenues dans le volume v.

Considerons l'expression

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$$

qui entre dans l'equation (11).

Multiplions cette expression par $\frac{1}{r}dx\,dy\,dz$, où

$$r = \sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2},$$

et integrons dans toute l'etendue d'une sphère de rayon R'. En vertu du theoreme de Green l'intégrale en question pourra s'écrire sous la forme

$$4\pi\varphi_1 - R'^2\int_0^\pi \sin\theta'\,d\theta'\int_0^{2\pi} d\omega'\left[\frac{1}{r'}\frac{\partial\varphi'}{\partial R'} - \varphi'\frac{\partial}{\partial R'}\frac{1}{r'}\right],$$

où φ_1 et φ' sont composés avec x_1, y_1, z_1 et x', y', z' comme φ l'est avec x, y, z et où

$$r' = \sqrt{(x_1-x')^2+(y_1-y')^2+(z_1-z')^2}.$$

On obtiendra ensuite en différentiant par rapport à x_1, après avoir multiplié l'expression en question par $dx_1dy_1dz_1$ et après l'avoir integree dans toute l'étendue du volume de la molecule,

$$4\pi\int_0^R R_1^2\,dR_1\left[\int_0^\pi \sin\theta_1\,d\theta_1\int_0^{2\pi} d\omega_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} - \int_0^\pi \sin\theta'\,d\theta'\int_0^{2\pi} d\omega'\cos\theta'\left(\frac{\partial\varphi'}{\partial R'} + \frac{2\varphi'}{R'}\right)\right].$$

La dernière integrale peut, à l'aide d'une intégration par parties, être transformee en

$$\int_0^\pi \sin\theta'\,d\theta'\cos\theta'\cdot 2\varphi' - \int_0^\pi \sin^2\theta'\frac{\partial\varphi'}{\partial\theta'}\,d\theta',$$

et comme

$$\frac{\partial\varphi'}{\partial R'}\cos\theta' - \frac{\partial\varphi'}{\partial\theta'}\frac{\sin\theta'}{R'} = \frac{\partial\varphi'}{\partial x'},$$

l'expression que nous avons obtenue peut s'écrire sous la forme plus simple

$$-4\pi\int_0^{\varepsilon} R_1^2 dR_1\left[\int_0^{\pi}\sin\theta_1 d\theta_1\int_0^{2\pi} d\omega_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} - \int_0^{\pi}\sin\theta' d\theta'\int_0^{\pi} d\omega'\frac{\partial\varphi'}{\partial x'}\right].$$

Multiplions enfin cette expression par $R'^2 dR'$ et intégrons entre les limites $R' = \varepsilon$ et $R' = e$; faisons de même pour toutes les molécules du volume v; nous aurons alors en additionnant tous les résultats

$$-\frac{v_e v_i}{N}\left[\int^{(i)}\frac{dv}{v_i}\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \int^{(e)}\frac{dv}{v_e}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right],$$

où nous nous servons des mêmes notations que dans ce qui précède, et où $v_i = \frac{4}{3}\pi\varepsilon^3 N$, $v_e = \frac{4}{3}\pi(e^3 - \varepsilon^3)N$.

La dernière intégrale est, en vertu de l'equation (9), égale à zéro, et le résultat de toutes les operations se réduira à

$$-\frac{v_e}{N}\int^{(i)} dv\frac{\partial\varphi}{\partial x}. \qquad (12)$$

Faisons les mêmes opérations sur tous les termes restants de l'équation (11), à savoir

$$\frac{\partial}{\partial x}\psi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + 1\right) + \frac{\partial}{\partial y}\psi\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\psi\frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

En multipliant par $\frac{1}{r}dx\,dy\,dz$ et en intégrant dans toute l'étendue du volume de la sphère de rayon R', nous obtiendrons, en intégrant par parties et en tenant compte de ce que ψ est nul à la surface de la sphère,

$$-\iiint dx\,dy\,dz\,\psi\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + 1\right)\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{r} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{r}\right].$$

Différentions cette expression par rapport à x_1, puis multiplions par $dx_1 dy_1 dz_1$ et intégrons de nouveau dans tout le volume de la molécule. Nous obtiendrons alors le résultat

$$\frac{4\pi}{3}\iiint dx\,dy\,dz\,\psi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}-1\right).$$

Si nous multiplions cette expression par $R'^2 dR'$, et si nous intégrons entre les limites $R'=\varepsilon$ et $R'=e$, l'expression sera seulement multipliée par le facteur constant $\frac{1}{3}(e^3-\varepsilon^3)$. On obtiendra enfin, en additionnant les expressions analogues correspondant à toutes les molécules du volume v,

$$\frac{v_e}{3N}\int dv\,\psi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}-1\right). \qquad (13)$$

Mais la somme des deux expressions (12) et (13) doit s'évanouir; on aura par conséquent

$$\int dv\,\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{1}{3}\int dv\,\psi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}-1\right). \qquad (14)$$

Au moyen de cette relation entre les deux intégrales qui entrent dans (10) on peut éliminer l'une, ce qui donnera

$$\frac{A^2-1}{A^2+2}\,v = \frac{1}{3}\int dv\,\psi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}-1\right) = \int dv\,\frac{\partial\varphi}{\partial x}. \qquad (15)$$

La solution du problème est exacte et, comme on voit, complète, si l'on fait l'hypothèse que la vitesse de la lumière est constante à l'intérieur de la molécule.

En effet, si nous désignons par A_1 l'indice de réfraction constant $\frac{\Omega}{\omega}$ de la molécule, on aura

$$\psi = A_1^2 - 1,$$

et l'équation (14) sera transformée en

$$\int_0^{(r)} dr\,\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \tfrac{1}{3}(A_i^2 - 1)\int_0^{r_i} dr\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + 1\right),$$

d'où l'on peut déduire

$$\int_0^{(r)} dr\,\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{A_i^2 - 1}{A_i^2 + 2}\,r_i,$$

et l'équation (15) se réduira à

$$\frac{A^2 - 1}{A^2 + 2}\,r = \frac{A_i^2 - 1}{A_i^2 + 2}\,r_i.$$

Par conséquent, si l'indice de réfraction moléculaire A_i et le volume de la molécule restent constants pour toute variation du volume ou de la température du corps, la fonction

$$\frac{A^2 - 1}{A^2 + 2}\,r = P$$

sera aussi constante.

Telle est la théorie modifiée de Lorenz pour l'indice de réfraction réduit.

Comme on voit, cette théorie est fondée sur l'hypothèse que la fonction $\frac{\partial F}{\partial x}$ est constante dans les intervalles des molécules. Car dans le cas contraire la fonction φ définie par l'équation

$$F = ex + (e + \xi_0)\varphi,$$

où

$$e = \int_0^{(r)} \frac{dr}{r_0}\frac{\partial F}{\partial x} - \int_0^{r_i} \frac{dr}{r_0}\frac{\partial F}{\partial x},$$

varierait en même temps que r_0, et par conséquent $\frac{A_i^2 - 1}{A_i^2 + 2}\,r_i$ n'aurait pas toujours une valeur constante. Au

ontraire l'hypothèse de la sphéricité des molécules n'est as fondamentale. Car on reconnaît que la supposition e la constance de $\frac{\partial F}{\partial x}$ dans les intervalles des molécules ntraîne en même temps la condition $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$. Mais alors équation (13) du premier mémoire intitulé „Recherches xpérimentales et théoriques sur les indices de réfraction“, à savoir l'équation

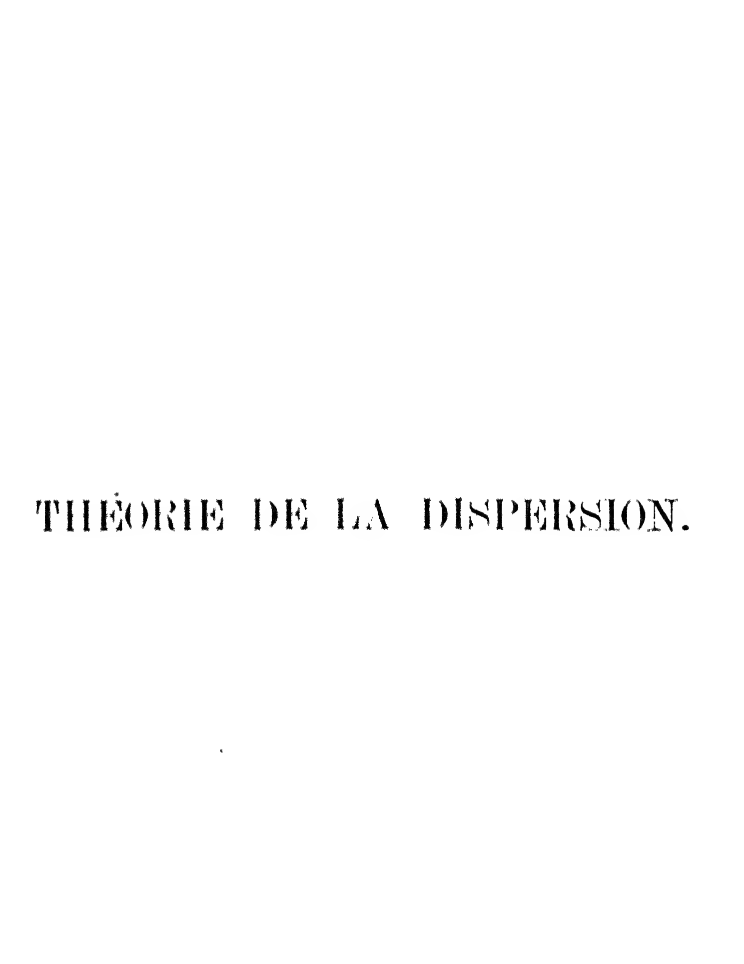
$$\int \frac{dr}{v} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{1}{3} \int \frac{dr}{r} \psi \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + 1 \right),$$

e réduira à

$$\int^{(i)} \frac{dr}{v} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \qquad \frac{1}{3} \int^{(i)} \frac{dr}{r} \psi \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + 1 \right),$$

l'on suppose que ψ est nul dans les intervalles intermoléculaires.

L'hypothèse de la sphéricité des molécules n'est onc introduite que pour la facilité des calculs, comme e remarque Lorenz lui-même. De plus on voit que cette ypothèse n'est pas parfaitement exacte, car un corps ontinu ne peut être composé d'éléments sphériques.



THÉORIE DE LA DISPERSION.

THÉORIE DE LA DISPERSION.

VIDENSK. SELSK. SKR., T. V (6). 1883.
WIED. ANN., T. XX (2), P. 1—21.* * NOTE 1.

Si l'on connaît les lois du mouvement pour un milieu parfaitement homogène et transparent ainsi que les lois du passage de la lumière d'un pareil milieu à un autre analogue, il sera toujours possible, sans faire aucune hypothèse, de calculer le mouvement de la lumière à l'intérieur d'un milieu non homogène mais partout parfaitement transparent, si en chaque point du milieu l'on connaît seulement la vitesse, la seule quantité dont il s'agit ici. Je chercherai a faire ici ce calcul dans le but de déduire les lois de la dispersion d'un corps homogène et isotrope, en particulier pour rechercher si elles dépendent de la longueur d'onde et du poids spécifique.

Il y a déja vingt ans que dans ma théorie de la lumière j'ai etabli les lois generales du mouvement de la lumière pour une vitesse variable de propagation. Je déduirai de nouveau ici ces lois générales d'une manière nouvelle et plus simple sans m'appuyer sur mes travaux antérieurs.

De plus, le problème étant de déterminer le mouvement à l'interieur d'un corps, il faut nécessairement faire une hypothèse determinee sur sa constitution. On ne peut guère douter que les corps ne soient composés

d'atomes ou de molécules séparées, et l'on reconnait de plus par ma théorie de la constante de refraction, qui s'est montrée en bonne concordance avec l'experience, qu'une partie du milieu lumineux reste liée invariablement avec les atomes pour toutes les variations de l'état physique, tandis que la lumière se propage dans le reste du milieu avec la même vitesse que dans le vide des espaces interstellaires.

D'ailleurs un vaste champ reste ouvert aux hypothèses sur le groupement des atomes et la dependance du milieu lumineux par rapport à ce groupement; mais provisoirement on doit se contenter de faire les calculs dans les hypothèses les plus simples qu'on puisse imaginer. Pour cette raison je supposerai que la vitesse de la lumière en un point voisin d'un atome, considere comme un point mathématique, soit une fonction de la distance du point considéré à cet atome, que cette fonction soit la même pour tous les atomes, que la vitesse a une plus grande distance soit la même que dans le vide, enfin que les atomes soient disposés d'une manière accidentelle, mais telle cependant que le corps soit isotrope.

On pourra ici faire l'objection que le mouvement interne des atomes est aussi un fait incontestable dont on doit tenir compte. D'après les idées recues actuellement le mouvement général se compose de deux parties, à savoir d'un mouvement qui est identique a la chaleur et d'un autre qui s'opère en mesure avec les vibrations lumineuses et qu'on suppose être la cause de l'absorption et du rayonnement de la lumière par les corps.

Quoique je ne regarde pas l'identité de la chaleur et des mouvements intérieurs comme un fait demontre, je ne doute pas de l'existence de tels mouvements, mais

les vitesses en question seront tellement petites relativement à celle de la lumière, qu'elles n'auront aucune influence appreciable sur le mouvement lumineux. La seule trace connue de l'influence du mouvement des corps sur la lumière (si l'on excepte une expérience de Fizeau vieille de 33 années et très douteuse, sur le passage de la lumière a travers l'eau en mouvement) est l'aberration des etoiles; mais la vitesse moléculaire est de beaucoup inferieure à celle de la Terre dans l'espace. La seconde espèce de mouvements forme la base des travaux modernes sur la théorie de la lumière relative a l'absorption et a l'emission. On pourrait dès l'abord objecter contre l'hypothèse de ces mouvements que, s'il est nécessaire que les atomes d'un corps exécutent comme la lumière 500 trillions de vibrations par seconde, le corps serait le siege de forces tellement énormes, que le deplacement des atomes contenus dans un gramme à la distance d'un trillionieme de millimètre de leur position d'equilibre exigerait une pression d'un trillion de kilogrammes. Cependant cette hypothèse n'a pas été inventée pour l'explication d'un mouvement des corps pesants qui serait produit directement par la lumière, car nous ne connaissons pas un tel effet de la lumière, mais seulement pour l'interpretation de certains phénomènes optiques qui peut-être peuvent aussi être expliqués d'une autre manière. Quoi qu'il en soit, il sera en tout cas necessaire de calculer auparavant les vibrations du milieu lumineux qui entoure les atomes en supposant que les atomes eux-mêmes sont en repos. Si l'on reconnaissait ensuite qu'il est nécessaire de supposer une vibration des atomes eux-memes, on pourrait en tenir compte par après.

Les lois générales bien connues des vibrations de la lumière dans un milieu isotrope et parfaitement homogène peuvent être exprimées par les equations suivantes:

$$\left.\begin{aligned} \Delta_2\xi = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}, \quad \Delta_2\eta = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}, \quad \Delta_2\zeta = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\zeta}{\partial z} = \theta = 0, \end{aligned}\right| \qquad (1)$$

où ξ, η, ζ sont les composantes des vibrations lumineuses, et où

$$\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2};$$

a désigne la vitesse constante de propagation de la lumière.

En passant d'un tel milieu à l'autre, où la vitesse de propagation est différente, le rayon satisfera à la loi bien connue du sinus, tandis que les rapports des amplitudes des rayons incident, réfracté et réfléchi seront, d'après les lois trouvées par Fresnel, égaux à

$$1 : \frac{2\cos\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)} : \frac{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)},$$

si les vibrations du rayon incident sont situées dans le plan d'incidence, et à

$$1 : \frac{2\cos\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} : -\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)},$$

si elles sont perpendiculaires à ce plan. L'angle d'incidence est désigné par α et l'angle de réfraction par β. On suppose ici que le plan de polarisation est perpendiculaire à la direction des vibrations.

La théorie développée par moi s'appuie uniquement sur l'hypothèse que ces lois sont valables dans tous les

cas, en sorte que tout écart de ces lois provient de ce qu'aucun corps n'est parfaitement homogène et que le passage d'un corps à l'autre s'opère graduellement sans solution de continuité.

On peut aussi exprimer les lois indiquées ci-dessus d'une autre manière. Si le plan des coordonnées yz est pris pour plan de séparation des deux milieux, les quatre quantités

$$\eta, \quad \zeta, \quad \frac{\partial\eta}{\partial x} - \frac{\partial\xi}{\partial y}, \quad \frac{\partial\zeta}{\partial x} - \frac{\partial\xi}{\partial z}$$

auront les mêmes valeurs des deux côtés du plan de séparation, ce qui est une conséquence des lois citées, qui peuvent à leur tour être déduites de cette proposition. D'où il suit que par exemple

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x} - \frac{\partial\xi}{\partial y}\right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\eta}{\partial z} - \frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)$$

ont partout une valeur finie, même pour $x = 0$. En additionnant ces quantités, on obtiendra

$$\Delta_2\eta - \frac{\partial\theta}{\partial y}.$$

Cette expression aura par conséquent partout une valeur finie. On peut donc en vertu de la seconde équation (1) former l'équation

$$\Delta_2\eta - \frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2},$$

valable pour les deux milieux, où ω est la vitesse de propagation, dont les valeurs diffèrent dans les deux milieux. D'une manière analogue on peut des conditions relatives à la limite déduire

$$\Delta_2 \zeta - \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{1}{\omega^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2},$$

et comme le plan de séparation a été pris arbitrairement pour plan des xy, on obtiendra par permutation des lettres

$$\Delta_2 \xi - \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{1}{\omega^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}.$$

Toutes les lois du mouvement de la lumière sont donc exprimées par trois équations aux dérivées partielles*, d'où l'on peut sans difficulté déduire inversement les lois dont nous nous sommes servi comme point de départ. Les équations différentielles trouvées doivent aussi être valables si l'on considère ω comme une fonction arbitraire de x, y, z. Elles ne donnent pas de renseignements nouveaux, et on pouvait s'en passer, mais elles ont une grande importance pour le calcul pratique.

* NOTE 2.

Si nous bornons le calcul à un mouvement ondulatoire de période donnée, nous pourrons exprimer la manière dont il dépend du temps par le facteur commun complexe e^{kti}.*

* NOTE 3.

Si nous posons

$$\frac{k^2}{\omega^2} = \mu,$$

les équations différentielles trouvées ci-dessus se réduiront à

$$\left.\begin{array}{c} \Delta_2 \xi - \dfrac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \xi = 0, \quad \Delta_2 \eta - \dfrac{\partial \theta}{\partial y} + \mu \eta = 0, \\ \Delta_2 \zeta - \dfrac{\partial \theta}{\partial z} + \mu \zeta = 0. \end{array}\right\} \quad (2)$$

Je chercherai en premier lieu à déterminer le mouvement de la lumière dans un milieu composé de couches

sphériques concentriques, où la vitesse de propagation n'est fonction que de la distance r au centre. Dans l'intérieur de chaque couche, μ est supposé constant; il peut au contraire prendre des valeurs différentes dans les différentes couches. Il va sans dire que cette supposition n'exclut pas le cas d'une variation continue de μ, car on peut toujours supposer que l'épaisseur des couches diminue indéfiniment.

Si l'on pose*

* NOTE 4.

$$x\xi + y\eta + z\zeta = \rho,$$

et si l'on multiplie les équations (2) respectivement par x, y, z, on obtiendra en additionnant

$$\Delta_2\rho - \frac{1}{r}\frac{\partial(r^2\theta)}{\partial r} + \mu\rho = 0. \tag{3}$$

Si l'on différentie les mêmes équations (2) par rapport à x, y, z, on obtiendra en additionnant

$$\mu\theta + \frac{\partial\mu}{\partial r}\frac{\rho}{r} = 0. \tag{4}$$

Quoique la valeur de μ change brusquement à la surface de séparation, il y a pourtant certaines fonctions des composantes des vibrations qui varieront d'une manière continue. On reconnaît ainsi par l'équation (3) que

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2(r\rho)}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial(r^2\theta)}{\partial r}$$

est partout fini, d'où il suit que

$$\frac{\partial(r\rho)}{\partial r} - r^2\theta$$

est une fonction continue, qui par conséquent aura la même valeur des deux côtés de la surface de séparation,

où μ est discontinu. J'exprimerai cette circonstance par l'équation

$$\left[\frac{\partial(r\rho)}{\partial r} - r^2\theta\right] = 0.$$

Mais de plus, μ étant constant des deux côtés de la surface de séparation, θ aura la valeur zéro, et la condition se réduira à

$$\left[\frac{\partial(r\rho)}{\partial r}\right] = 0. \tag{5}$$

Une seconde condition relative à la limite provient du fait que

$$\theta - \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\rho}{r}\right)$$

est partout fini, parce que les dérivées par rapport à r s'évanouissent dans cette expression. Si l'on introduit la valeur de θ donnée par l'équation (4), l'expression se réduira à

$$-\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\mu\rho}{r}\right),$$

d'où il suit que $\mu\rho$ est une fonction continue, et qu'on aura en conséquence pour toutes les surfaces de séparation

$$[\mu\rho] = 0. \tag{6}$$

Ces deux conditions relatives aux limites, combinées avec l'équation différentielle

$$\Delta_2\rho + \mu\rho = 0, \tag{7}$$

valable dans l'intérieur de chaque couche, où μ est constant, suffisent à la détermination de ρ.

Si dans la première équation (2) l'on pose $x = r\cos\varphi$, on reconnaîtra que

$$\frac{\partial^2(r\xi)}{\partial r^2} - \frac{\partial\theta}{\partial r}r\cos\varphi + \frac{\partial\theta}{\partial\varphi}\sin\varphi$$

a partout une valeur finie. Comme de plus

$$\frac{\partial^2(r\rho)}{\partial r^2}, \quad \frac{\partial(r^2\theta)}{\partial r} \quad \text{et} \quad \theta \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\rho}{r}\right)$$

sont partout finis, ainsi que nous l'avons démontré ci-dessus, on reconnait que

$$\frac{\partial^2(r\xi)}{\partial r^2} - \cos\varphi \frac{\partial^2 \rho}{\partial r^2} - \sin\varphi \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi}\left(\frac{\rho}{r}\right)$$

a partout une valeur finie. Cette expression peut être transformée en

$$\frac{\partial^2(r\xi)}{\partial r^2} - \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right),$$

et on obtiendra la condition relative à la limite

$$\Big|\frac{\partial(r\xi)}{\partial r} - \frac{\partial \rho}{\partial x}\Big| = 0. \qquad (8)$$

Comme de plus cette expression est partout finie et que par conséquent

$$\frac{\partial(r\xi)}{\partial r} - \frac{\partial \rho}{\partial r}\cos\varphi$$

l'est aussi, on obtiendra la nouvelle condition relative à la limite

$$\Big| r^2\xi - \rho x \Big| = 0. \qquad (9)$$

D'une manière analogue on formera les équations

$$\left.\begin{array}{ll} \Big|\dfrac{\partial(r\eta)}{\partial r} - \dfrac{\partial \rho}{\partial y}\Big| = 0, & \Big| r^2\eta - \rho y \Big| = 0, \\ \Big|\dfrac{\partial(r\zeta)}{\partial r} - \dfrac{\partial \rho}{\partial z}\Big| = 0, & \Big| r^2\zeta - \rho z \Big| = 0, \end{array}\right\} \qquad (10)$$

auxquelles il faut adjoindre les équations différentielles, valables au dehors des surfaces de séparation,

$$\Delta_2\xi + \mu\xi = 0, \quad \Delta_2\eta + \mu\eta = 0, \quad \Delta_2\zeta + \mu\zeta = 0. \qquad (11)$$

D'ailleurs on doit avoir ici $\theta = 0$.

Les fonctions ρ, ξ, η, ζ peuvent être développées en séries de fonctions sphériques. Je me servirai pourtant ici de fonctions dont la forme diffère de celle des fonctions sphériques ordinaires, ce qui facilite considérablement les calculs.

Si l'on pose

$$V_n^m = \frac{\partial^n}{\partial x^{n-m}\,\partial y^m}\left(\frac{1}{r}\right), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

et si l'on fait l'hypothèse, suffisante pour les calculs, que ρ, ξ, η sont des fonctions paires de z et que ζ au contraire est une fonction impaire de z, on peut employer les développements suivants

$$\left.\begin{aligned} \rho &= \Sigma \rho_n^m V_n^m, & \xi &= \Sigma \xi_n^m V_n^m, \\ \eta &= \Sigma \eta_n^m V_n^m, & \zeta &= \Sigma \zeta_n^m \frac{\partial}{\partial z}(V_{n-1}^m), \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

où les sommations s'étendent relativement à m de $m = 0$ à $m = n$ dans les trois premières séries et à $m = n - 1$ dans la dernière, et relativement à n à toutes les valeurs entières et positives de $n = 0$ à $n = \infty$. Les coefficients ρ_n^m, ξ_n^m, η_n^m, ζ_n^m sont seulement fonctions de r. De plus on peut remarquer que, si les calculs amènent des dérivées par rapport à z d'un ordre plus élevé que le premier, celles-ci peuvent être éliminées au moyen de l'équation

$$\Delta_2 V_n^m = 0.$$

D'autre part on reconnaît par la définition de V_n^m que

* NOTE 5.

$$\frac{\partial V_n^m}{\partial r} = -\frac{n+1}{r} V_n^m.*$$

Si l'on introduit les séries dans les équations (7) et (11), on verra que les coefficients ρ_n^m, ξ_n^m, η_n^m, ζ_n^m doivent satisfaire à l'équation

$$\frac{d^2 f_n}{dr^2} - \frac{2n}{r}\frac{df_n}{dr} + \mu f_n = 0. \qquad (13)$$

Cette équation admet les deux intégrales particulières

$$\left.\begin{aligned} \varphi_n &= r^{2n+1}\left(1 - \frac{\mu r^2}{2(2n+3)} + \frac{\mu^2 r^4}{2\cdot 4\cdot(2n+3)(2n+5)} - \dots\right), \\ \psi_n &= 1 + \frac{\mu r^2}{2(2n-1)} + \frac{\mu^2 r^4}{2\cdot 4\cdot(2n-1)(2n-3)} + \dots \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Par suite on peut écrire

$$\left.\begin{aligned} \rho_n^m &= k_n^m \varphi_n + x_n^m \psi_n, & \xi_n^m &= a_n^m \varphi_n + \alpha_n^m \psi_n, \\ \eta_n^m &= b_n^m \varphi_n + \beta_n^m \psi_n, & \zeta_n^m &= c_n^m \varphi_n + \gamma_n^m \psi_n, \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

où tous les nouveaux coefficients sont, aussi bien que μ, constants dans l'intérieur de chaque couche, mais prennent des valeurs différentes quand on passe d'une couche à l'autre. En vertu des équations (14), on obtiendra* * NOTE 6

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{r}\frac{d\varphi_n}{dr} &= (2n+1)\varphi_{n-1}, \quad \frac{1}{r}\frac{d\psi_n}{dr} = \frac{\mu}{2n-1}\psi_{n-1}, \\ r^{2n+2}\frac{d}{dr}\left(\frac{\varphi_n}{r^{2n+1}}\right) &= -\frac{\mu}{2n+3}\varphi_{n+1}, \\ r^{2n+2}\frac{d}{dr}\left(\frac{\psi_n}{r^{2n+1}}\right) &= -(2n+1)\psi_{n+1}. \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

En vertu de la définition de V_n^m, on aura

$$xV_0^0 + r^2 V_1^0 = 0, \quad yV_0^0 + r^2 V_1^1 = 0.$$

Si l'on différentie la première équation $(n-m)$ fois par rapport à x et m fois par rapport à y, et la seconde équation $(n-m+1)$ fois par rapport à x et $(m-1)$ fois

par rapport à y, on obtiendra deux équations, qui pe-
vent aisément être transformées en

$$(2n+1)xV_n^m = r^2V_{n-1}^m - (n^2 - m^2)V_{n+1}^m + m(m-1)V_{n+1}^{m-2},$$

$$(2n+1)yV_n^{m-1} = r^2V_{n-1}^m + (n-m+1)(n-m)V_{n+1}^m - (2n-m+1)(m-1)V \ldots$$

D'une manière analogue on obtiendra au moyen d[es]

* NOTE 7. dernières équations *

$$(2n+1)zV_n^m = r^2\frac{\partial}{\partial z}(V_n^m) + (n-m)(n-m-1)\frac{\partial}{\partial z}(V_{n+2}^m) + m(m-1)\frac{\partial}{\partial z}(V \ldots$$

Par différentiation de cette équation par rapport a[u]
on obtiendra en remplaçant n par $(n-1)$

$$(2n-1)z\frac{\partial}{\partial z}(V_{n-1}^m) = r^2V_{n-1}^{m-2} - r^2V_{n-1}^m - (n-m-1)(n-m-2) \ldots$$

$$[(n-m-1)^2 - n - m^2]V_{n+1}^m - m(m-1) \ldots$$

Les quatre quantités ρ, ξ, η, ζ sont liées par l[es]
équations

$$x\xi + y\eta + z\zeta = \rho, \quad \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0.$$

Pour développer les relations entre les coefficien[ts]
ρ_n^m, etc., qui sont une conséquence de ces équations, o[n]
forme les séries suivantes, où s est un nombre arbitrair[e]

$$\frac{\partial(r^s x\xi)}{\partial r} - r^{s+1}\frac{\partial \xi}{\partial x} = \Sigma \xi_n^m((s-n)r^{s-1}xV_n^m - r^{s+1}V_{n-1}^m),$$

$$\frac{\partial(r^s y\eta)}{\partial r} - r^{s+1}\frac{\partial \eta}{\partial y} = \Sigma \eta_n^m((s-n)r^{s-1}yV_n^m - r^{s+1}V_{n-1}^m),$$

$$\frac{\partial(r^s z\zeta)}{\partial r} - r^{s+1}\frac{\partial \zeta}{\partial z} = \Sigma \zeta_n^m\Big((s-n)r^{s-1}z\frac{\partial}{\partial z}(V_{n-1}^m) - r^{s-1}(V_{n-1}^m \ldots$$

Le premier membre de l'équation qu'on obtient e[n]
additionnant ces trois équations sera

$$\frac{\partial(r^s\rho)}{\partial r} = \Sigma \frac{d(r^{s-n-1}\rho_n^m)}{dr} \cdot r^{n+1}V_n^m.$$

Dans le second membre on introduit les valeurs de xV_n^m, yV_n^m et $\frac{\partial}{\partial z}(V_{n-1}^m)$ trouvées ci-dessus, puis on égale des deux cotés les coefficients de V_n^m. De cette manière on obtient, si l'on pose $s = n+1$,

$$\frac{2n-1}{2n+1}\frac{1}{r}\frac{d(\rho_n^m)}{dr} \quad \xi_{n-1}^m \quad \eta_{n-1}^{m+1} \quad \zeta_{n-1}^m \quad \zeta_{n-1}^{m+2} = 0, \qquad (20)$$

et si l'on pose $s = n$,

$$\frac{2n+3}{2n+1}r^{2n+2}\frac{d}{dr}\left(\frac{\rho_n^m}{r^{2n+1}}\right) \cdot (m+2)(m+1)\xi_{n+1}^{m+2} - ((n+1)^2 - m^2)\xi_{n+1}^m$$
$$(m+1)(2n-m+1)\eta_{n+1}^{m+1} \quad (n-m+2)(n-m+1)\eta_{n+1}^{m-1} - (m+2)(m+1)\zeta_{n+1}^{m+2}$$
$$((n-m)^2+m^2+n+1)\zeta_{n+1}^m \quad (n-m+2)(n-m+1)\zeta_{n+1}^{m-2} = 0. \qquad (21)$$

Si l'on introduit ici les expressions de ρ_n^m, etc., données par les équations (15), on obtiendra au moyen des équations (16)

$$\left.\begin{aligned} (2n-1)k_n^m \quad a_{n-1}^m \quad b_{n-1}^{m+1} \quad c_{n-1}^m - c_{n-1}^{m+2} \quad 0, \\ \frac{\mu}{2n+1}\varkappa_n^m \quad \alpha_{n-1}^m \quad \beta_{n-1}^{m+1} \quad \gamma_{n-1}^m - \gamma_{n-1}^{m+2} = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\mu}{2n+1}k_n^m + (m+2)(m+1)a_{n+1}^{m+2} \quad ((n+1)^2 - m^2)a_{n+1}^m \quad (m+1)(2n-m+1)b_{n+1}^{m+1} \\ &(n-m+2)(n-m+1)b_{n+1}^{m-1} \quad (m+2)(m+1)c_{n+1}^{m+2} \quad ((n-m)^2+m^2+n+1)c_{n+1}^m \\ &(n-m+2)(n-m+1)c_{n+1}^{m-2} \quad 0, \\ &(2n+3)\varkappa_n^m + (m+2)(m+1)\alpha_{n+1}^{m+2} \quad ((n+1)^2 - m^2)\alpha_{n+1}^m \\ &(m+1)(2n-m+1)\beta_{n+1}^{m+1} \quad (n-m+2)(n-m+1)\beta_{n+1}^{m-1} \\ &(m+2)(m+1)\gamma_{n+1}^{m+2} \quad ((n-m)^2+m^2+(n+1))\gamma_{n+1}^m \quad (n-m+2)(n-m+1)\gamma_{n+1}^{m-2} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (23)$$

Outre ces relations entre les coefficients constants dans l'intérieur de chaque couche, il faut encore chercher les relations entre les coefficients correspondants à deux couches voisines. Si l'on désigne par un accent les coefficients relatifs à la couche intérieure et si r est le rayon

de la surface de séparation, on trouvera en vertu des équations (5) et (6)

$$\left.\begin{aligned} k_n^m \frac{d(r^{-n}\varphi_n)}{dr} + \varkappa_n^m \frac{d(r^{-n}\psi_n)}{dr} &= k_n'^m \frac{d(r^{-n}\varphi_n')}{dr} + \varkappa_n'^m \frac{d(r^{-n}\psi_n')}{dr}, \\ \mu(k_n^m \varphi_n + \varkappa_n^m \psi_n) &= \mu'(k_n'^m \varphi_n' + \varkappa_n'^m \psi_n'), \end{aligned}\right\} \quad (24)$$

ou φ_n' et ψ_n' sont des fonctions analogues à φ_n et ψ_n formées en remplaçant μ par μ'.

Quand la surface en question est celle qui est la plus proche du centre, les coefficients $k_n'^m$ et $\varkappa_n'^m$ correspondent à la couche sphérique centrale. Ici il faut nécessairement que tous les coefficients $\varkappa_n'^m$ s'évanouissent, car dans le cas contraire ρ serait infiniment grand au centre lui-même. $k_n'^m$ peut être éliminé par les équations (24). Puis on peut passer à la surface de séparation suivante, et en continuant de cette manière on voit qu'on peut pour une couche quelconque trouver une équation

$$\varkappa_n^m = p_n k_n^m, \quad (25)$$

où p_n dépend seulement de n et des valeurs que prennent μ et les rayons des surfaces de séparation à l'intérieur de la couche en question.

De même on obtient au moyen des équations (8), (9), (10), si l'on introduit les séries et si l'on compare les coefficients de V_n^m dans les deux membres, six équations qui peuvent être réduites au moyen des équation (20) et (21) aux deux conditions aux limites suivantes*

$$[m(\xi_n^m - \zeta_n^m) - (n-m+1)(\eta_n^{m-1} - \zeta_n^{m-2})] = 0,$$

$$\left[\frac{d}{dr}(m(\xi_n^m - \zeta_n^m) - (n-m+1)(\eta_n^{m-1} - \zeta_n^{m-2}))\right] = 0.$$

Si l'on pose pour abréger

$$\left.\begin{aligned} m(a_n^m - c_n^m) - (n - m + 1)(b_n^{m-1} - c_n^{m-2}) &= s_n^m, \\ m(\alpha_n^m - \gamma_n^m) - (n - m + 1)(\beta_n^{m-1} - \gamma_n^{m-2}) &= \sigma_n^m, \end{aligned}\right\} \quad (26)$$

on obtiendra

$$\left.\begin{aligned} s_n^m \varphi_n + \sigma_n^m \psi_n &= s_n'^m \varphi_n' + \sigma_n'^m \psi_n', \\ s_n^m \frac{d\varphi_n}{dr} + \sigma_n^m \frac{d\psi_n}{dr} &= s_n'^m \frac{d\varphi_n'}{dr} + \sigma_n'^m \frac{d\psi_n'}{dr}, \end{aligned}\right\} \quad (27)$$

où les lettres accentuées ont la même signification que plus haut. A l'aide des équations (27) on obtiendra de la même manière que ci-dessus

$$\sigma_n^m = q_n s_n^m,$$

où q dépend seulement de n et des valeurs que prennent μ et r à l'intérieur de la couche en question.

Après avoir développé de cette manière les équations générales dont on a besoin pour le calcul du mouvement de la lumière dans un milieu lumineux composé de couches concentriques, homogènes et sphériques, je passerai à la détermination du mouvement de la lumière dans l'intérieur d'un corps isotrope, où je considère les atomes, ainsi que je l'ai dit dans l'introduction, comme des points autour desquels le milieu lumineux est disposé en couches concentriques jusqu'à une certaine distance, tandis que, en dehors de cette distance, qui est moindre que la moitié de la distance moyenne de deux atomes voisins, le milieu lumineux est identique à ce qu'il est dans le vide.

Si δ est la distance moyenne de deux atomes voisins, et si l'on suppose que les vibrations de la lumière sont, à la distance δ d'un atome, parallèles à l'axe des y,

si de plus l'on suppose que la propagation du mouvement s'opère dans la direction de l'axe des x, on pourra pour $x = \delta$ poser

$$\xi = 0, \quad \zeta = 0, \quad \eta = e^{(kt-lx)i}F, \tag{29}$$

où F est une fonction qui reprend périodiquement la même valeur d'un atome à l'autre. La dernière formule représente donc un mouvement ondulatoire qui se propage dans le corps avec la vitesse $\frac{k}{l}$.

Pour rechercher plus précisément le sens de la fonction F, nous considérons deux atomes dont la distance est 2δ. Une ligne droite qui passe par les deux atomes coupe les deux surfaces sphériques qui sont en contact et dont le rayon est δ aux trois points A, B et C. Les valeurs que prend F tout le long de cette droite peuvent être représentées par une courbe, qui se répète de A à B et de B à C de la même manière. Par conséquent F aura les mêmes valeurs en A et en B, et les tangentes à la courbe en ces deux points seront parallèles. Comme la direction de r est comptée positivement à partir du centre dans le deux directions, $\frac{dF}{dr}$ prendra en A et en B des valeurs numériquement égales mais de signe contraire.

On aura

$$e^{kti}F = e^{lxi}\eta = e^{lxi}\Sigma\eta_n^m V_n^m;$$

dans cette série les termes seront égaux pour des points diamétralement opposés et auront le même signe pour n pair, le signe contraire pour n impair. Par conséquent on aura pour $r = \delta$

$$e^{lxi}\Sigma(\eta_{2n}^m V_{2n}^m + \eta_{2n+1}^m V_{2n+1}^m) = e^{-lxi}\Sigma(\eta_{2n}^m V_{2n}^m - \eta_{2n+1}^m V_{2n+1}^m),$$
$$\frac{\partial}{\partial r}\left(e^{lxi}\Sigma(\eta_{2n}^m V_{2n}^m + \eta_{2n+1}^m V_{2n+1}^m) + e^{-lxi}\Sigma(\eta_{2n}^m V_{2n}^m - \eta_{2n+1}^m V_{2n+1}^m)\right) = 0.$$

Ces équations peuvent être transformées en

$$\left.\begin{aligned}(e^{lxi} - e^{-lxi})\,\Sigma\eta_{2n}^m V_{2n}^m + (e^{lxi} + e^{-lxi})\,\Sigma\eta_{2n+1}^m V_{2n+1}^m &= 0,\\ (e^{lxi} + e^{-lxi})\frac{\partial}{\partial r}\Sigma\eta_{2n}^m V_{2n}^m + (e^{lxi} - e^{-lxi})\frac{\partial}{\partial r}\Sigma\eta_{2n+1}^m V_{2n+1}^m &= 0.\end{aligned}\right\} \quad (30)$$

Ces deux-ci sont valables pour les points de contact de la surface sphérique avec une autre surface sphérique de la même nature. Pour cette raison le nombre de ces points est limité; mais la position de ces points est accidentelle, et le corps étant supposé isotrope, la probabilité pour qu'un point arbitraire soit un point de contact est partout la même. C'est pourquoi je suppose que les équations précédentes sont en général valables pour tous les points de la sphère $r = \delta$.

Pour la discussion ultérieure de ces équations il importe de remarquer qu'on peut considérer lx comme une quantité très petite. Helmholtz s'est déjà servi de cette circonstance (Pogg. Ann., t. 154, p. 584), car dans sa théorie de la dispersion il a pris comme point de départ la supposition que la distance des particules pondérables est infiniment petite en comparaison d'une longueur d'onde. On sait qu'en réalité on a pu tout au moins se former une idée de ces distances. Ainsi la longueur d'onde de la lumière visible est dans l'eau approximativement 10000 fois plus grande que δ, et dans les gaz, même pour la plus grande raréfaction pour laquelle la dispersion est encore appréciable, la longueur d'onde doit être quelques centaines de fois plus grande que δ.

* NOTE 9. Or on a*

$$N = \frac{lO}{k}, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} O, \quad l = \frac{2\pi}{\lambda} N,$$

N étant l'indice de réfraction du corps, O la vitesse de la lumière dans le vide, et λ la longueur d'onde, correspondante de même au vide. Par la dernière équation on reconnaît que lx, qui ne peut dans les formules ci-dessus excéder $l\delta$, doit être une petite quantité du même ordre que $\frac{\delta}{\lambda}$.

De plus on peut remarquer, si l'on désigne par μ_δ la valeur de μ pour $r = \delta$, qu'on aura

$$\mu_\delta = \frac{k^2}{O^2} = \frac{4\pi^2}{\lambda^2},$$

$$N^2 = \frac{l^2}{\mu_\delta}.$$

On en peut conclure que $\mu_\delta \delta^2$ sera infiniment petit du second ordre, si $l\delta$ est considéré comme une quantité infiniment petite du premier ordre, et que par conséquent N^2 se présentera comme un rapport de deux quantités infiniment petites du second ordre.

Par conséquent, si lx est considéré comme une quantité infiniment petite, on tirera des équations (30)

$$lxi \Sigma \eta_{2n}^m V_{2n}^m + \Sigma \eta_{2n+1}^m V_{2n+1}^m = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \Sigma \eta_{2n}^m V_{2n}^m + lxi \frac{\partial}{\partial r} \Sigma \eta_{2n+1}^m V_{2n+1}^m = 0.$$

On en déduit au moyen de la première équation (17) par comparaison des coefficients de V_{2n+1}^m et V_{2n}^m pour $r = \delta$

$$\left.\begin{aligned} & i\left(-\frac{r^2}{4n+1}\eta^m_{2n}-\frac{(2n+2)^2-m^2}{4n+5}\eta^m_{2n+2}+\frac{(m+2)(m+1)}{4n+5}\eta^{m+2}_{2n+2}\right)+\eta^m_{2n+1}=0, \\ & ir\frac{d}{dr}\frac{1}{r^{2n+2}}\left(-\frac{r^2}{4n-1}\eta^m_{2n-1}-\frac{(2n+1)^2-m^2}{4n+3}\eta^m_{2n+1}+\frac{(m+2)(m+1)}{4n+3}\eta^{m+2}_{2n+1}\right) \\ & \qquad +\frac{d}{dr}\frac{1}{r^{2n+1}}\eta^m_{2n}=0. \end{aligned}\right\} \quad (32)$$

Si l'on pose $n=0$, $m=0$, on obtiendra pour $r=\delta$

$$\left.\begin{aligned} & li(-r^2\eta^0_0-\tfrac{4}{5}\eta^0_2+\tfrac{2}{5}\eta^2_2)+\eta^0_1=0, \\ & -\frac{1}{3}lir\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r^2}\eta^0_1\right)+\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\eta^0_0\right)=0. \end{aligned}\right\} \quad (33)$$

Comme on peut à volonté considérer $r^2\eta^0_0$ comme une quantité finie, les quantités η^0_2 et η^2_2 peuvent être négligées, à moins qu'elles ne soient finies. Pour cette raison on pourra négliger le premier terme, dans lequel entre le facteur lr de la seconde équation (32), si l'on pose $n=1$, $m=0$ ou $m=2$, et alors on aura pour $r=\delta$

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r^3}\eta^0_2\right)=0,\quad \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r^3}\eta^2_2\right)=0.$$

On en déduit la relation suivante correspondante à la couche extérieure jusqu'à $r=\delta$

$$2b^0_2\delta^5=3\beta^0_2,\quad 2b^2_2\delta^5=3\beta^2_2,$$

si l'on introduit les coefficients constants (équation (15)) en négligeant les quantités infiniment petites. De plus on aura en vertu des deux premières équations (29)

$$a^1_2\delta^5+a^1_2=0,\quad c^1_2\delta^5+\gamma^1_2=0,$$

relations qui sont valables pour la même couche.

Si l'on pose en outre dans la seconde équation (22) $n=3$, $m=1$ ou $m=3$, on obtiendra, en négligeant le premier terme, qui est infiniment petit,

$$\alpha_2^1 + \beta_2^0 - \gamma_2^1 = 0, \quad \beta_2^2 - \gamma_2^1 = 0,$$

et les équations (23) donneront pour $n = 1$, $m = 1$

* NOTE 10.

$$-3\,a_2^1 - 4\,b_2^2 + 2\,b_2^0 - 3\,c_2^1 = 0^*,$$
$$-5\,x_1^1 - 3\,\alpha_2^1 - 4\,\beta_2^2 + 2\,\beta_2^0 - 3\,\gamma_2^1 = 0.$$

Ces huit équations ne suffisent pourtant pas à la détermination des 8 constantes comme fonctions de x_1^1, car on verra que parmi ces équations se trouve une identité. Cependant on tirera des équations (26) et (28) pour $n = 2$, $m = 1$

$$s_2^1 = a_2^1 - c_2^1 - 2\,b_2^0, \quad \sigma_2^1 = \alpha_2^1 - \gamma_2^1 - 2\beta_2^0, \quad \sigma_2^1 = q_2 s_2^1,$$

qui combinées avec les équations ci-dessus donneront

$$s_2^1 \delta^5 = -2\beta_2^0, \quad \sigma_2^1 = -3\,\beta_2^0,$$

et par conséquent

$$3\,\beta_2^0 \delta^5 = 2\,\beta_2^0 q_2.$$

Mais comme q_2 dépend seulement des valeurs que prennent n et les rayons des surfaces de séparation en dedans de la couche extrême, il faut qu'on ait $\beta_2^0 = 0$. Ensuite on obtient en vertu des équations déduites ci-dessus

$$b_2^0 = 0, \quad b_2^2 \delta^5 = \tfrac{3}{2}\beta_2^2 = -\tfrac{3}{4}x_1^1.$$

Si de plus dans les équations (22) on pose $n = 1$, $m = 1$, on obtiendra les relations

$$k_1^1 + b_0^0 = 0, \quad \tfrac{1}{3}\mu\, x_1^1 + \beta_0^0 = 0,$$

valables pour toutes les couches. Pour la couche extrême, où μ est désigné par μ_δ, on obtiendra par suite, en conservant les quantités infiniment petites du second ordre,

$$\eta_0^0 = -k_1^1(r - \tfrac{1}{6}\mu_\delta r^3) - \tfrac{1}{3}\mu_\delta x_1^1.$$

Les équations (33) peuvent être transformées en

$$li(k_1^1\delta^3 - \tfrac{1}{2}\varkappa_1^1) + b_1^0\delta^3 + \beta_1^0 = 0,$$
$$-li(b_1^0\delta^3 - 2\beta_1^0) + \mu_\delta(k_1^1\delta^3 + \varkappa_1^1) = 0,$$

d'où l'on peut déduire

$$\frac{l^2}{\mu_\delta} = N^2 = \frac{k_1^1\delta^3 + \varkappa_1^1}{k_1^1\delta^3 - \frac{1}{2}\varkappa_1^1} \cdot \frac{b_1^0\delta^3 + \beta_1^0}{b_1^0\delta^3 - 2\beta_1^0}.$$

En vertu de l'équation (25) on aura

$$\varkappa_1^1 = p_1 k_1^1.$$

De plus on aura en vertu de la première équation (29) pour $r = \delta$, $\xi_1^1 = 0$, en négligeant les quantités infiniment petites d'un ordre supérieur,

$$a_1^1\delta^3 + \alpha_1^1 = 0,$$

et si l'on pose $n = 2$, $m = 1$ dans la seconde équation (22) en négligeant le premier terme, infiniment petit du second ordre,

$$\alpha_1^1 + \beta_1^0 = 0,$$

équation qui est valable pour la couche extrême.

Les équations (26) et (28) donneront pour $n = 1$, $m = 1$

$$a_1^1 - b_1^0 = s_1^1, \quad \alpha_1^1 - \beta_1^0 = \sigma_1^1, \quad \sigma_1^1 = q_1 s_1^1.$$

En conséquence de ces équations on aura

$$\frac{\beta_1^0}{b_1^0} = \frac{q_1\delta^3}{q_1 + 2\delta^3}.$$

L'indice de réfraction est donc déterminé par l'équation simple

$$N^2 = \frac{\delta^3 + p_1}{\delta^3 - \frac{1}{2}p_1} + \frac{\delta^3 + q_1}{\delta^3 - \frac{1}{2}q_1}, \tag{34}$$

où p_1 et q_1 sont deux quantités indépendantes de δ.

* NOTE 11. *Nous avons supposé que μr^2 était infiniment petit dans la couche extrême située immédiatement en dedans de $r = \delta$; mais dans les couches intérieures cette quantité doit avoir une valeur différente de zéro, si la lumière est effectivement réfractée par le corps. Si nous supposons que μr^2 est fini en dedans de la surface de séparation $r = \varepsilon$, nous obtiendrons par la seconde équation (24) pour $r = \varepsilon$,

$$0 = k'^m_n \varphi'_n + \varkappa'^m_n \psi'_n,$$

et on doit avoir, en vertu de l'équation (25), $\varkappa'^m_n = p'_n k'^m_n$ où p'_n est indépendant de ε. Par conséquent on doit avoir $k'^m_n = 0$ et $\varkappa'^m_n = 0$, c'est-à-dire que les vibrations seront perpendiculaires au rayon à l'intérieur de la surface $r = \varepsilon$. Ceci est d'ailleurs évident a priori, car notre hypothèse revient à supposer que la vitesse de la lumière, en traversant la surface de séparation, passe d'une valeur infiniment petite à une valeur finie, et pour cette raison il faut que tous les rayons lumineux soient réfractés vers le centre et que les vibrations soient par suite perpendiculaires au rayon.

On obtient ensuite, en vertu de la première équation (24), pour $n = 1$, $m = 1$

* NOTE 12.

$$k_1^1 \cdot 2\varepsilon - \frac{\varkappa_1^1}{\varepsilon^2} = 0, \quad \text{d'où } p_1 = 2\varepsilon^3.*$$

On peut donc approximativement considérer p_1 comme une quantité qui est proportionnelle au volume du milieu lumineux fortement modifié dans le voisinage de l'atome,

mais qui est indépendante de la réfraction du milieu lui-même.

L'autre quantité q_1, dont dépend l'équation (34), peut être calculée au moyen des équations (27) et (28).

Je chercherai d'abord à éclaircir par un exemple de quelle manière q_1 dépend de la longueur d'onde. Je supposerai que μ s'évanouit au dehors de la surface de séparation $r = \varepsilon$, et qu'il est constant partout dans l'intérieur et égal à μ'. Dans ce cas on doit dans les équations (27) égaler $\sigma_n'^m$ à zéro*, et, si l'on pose $n = 1$, on aura en supprimant l'indice supérieur m * NOTE 13.

$$s_1 \varepsilon^3 + \sigma_1 = s_1'(\varepsilon^3 - \tfrac{1}{10}\mu' \varepsilon^5 + \ldots),$$
$$3 s_1 \varepsilon^2 = s_1'(3\varepsilon^2 - \tfrac{1}{2}\mu' \varepsilon^4 + \ldots),$$

d'où l'on tirera

$$\frac{\sigma_1}{s_1} = q_1 = \frac{1}{15}\mu' \varepsilon^5 + \ldots = \frac{a}{\lambda^2} + \ldots$$

On pourra donc, pourvu que la série soit convergente, développer q_1 en série suivant les puissances croissantes de $\frac{1}{\lambda^2}$, et le premier terme sera positif.

Si l'on considère en toute généralité μ comme une fonction finie et continue, on doit recourir à l'équation différentielle (13), d'où les conditions (27) relatives à la limite peuvent être déduites. Si l'on suppose comme ci-dessus que $r = \varepsilon$ est la limite au dehors de laquelle μ s'évanouit, le problème à résoudre sera d'intégrer l'équation différentielle sous les conditions que $f_n = 0$* pour $r = 0$, et que pour $r = \varepsilon$ * NOTE 14.

$$f_n = s_n(r^{2n+1} + q_n), \quad \frac{df_n}{dr} = (2n+1) s_n r^{2n}.$$

Après avoir éliminé les deux constantes arbitraires, on obtiendra au moyen de ces trois équations une équation résultante, qui permettra de déterminer q_n. Si l'on fait l'hypothèse que f_n peut être développé en série convergente suivant les puissances croissantes du facteur $\frac{1}{\lambda^2}$ qui entre dans μ, on reconnaît sans difficulté que q_n peut en général être développé en une série de la forme

$$\frac{a}{\lambda^2}+\frac{b}{\lambda^4}+\cdots$$

On verra de cette manière, si l'on désigne par A l'indice de réfraction correspondant à une longueur d'onde infiniment grande et par suite à $q_1 = 0$, que l'équation (34) donnera

$$A^2 = \frac{\delta^3+p_1}{\delta^3-\frac{1}{2}p_1}, \quad \frac{A^2-1}{A^2+2}\delta^3 = \tfrac{1}{2}p_1, \quad \frac{N^2-A^2}{N^2+2A^2}\delta^3 = \tfrac{1}{2}q_1.$$

Comme résultat de cette analyse on reconnaît que les lois de la réfraction dans un corps transparent peuvent être exprimées par les équations suivantes

$$\frac{A^2-1}{A^2+2}\cdot\frac{1}{d} = R, \quad \frac{N^2-A^2}{N^2+2A^2}\cdot\frac{1}{d} = D = \frac{a}{\lambda^2}+\frac{b}{\lambda^4}+\cdots,$$

où N est l'indice de réfraction du corps, d son poids spécifique, R et D deux constantes indépendantes du poids spécifique. De plus a est une constante positive, et, comme cela ressort des équations elles-mêmes, A est l'indice de réfraction correspondant à $\lambda = \infty$.

Il y a déjà quatorze ans que j'ai déduit par voie théorique la première de ces équations*, dont l'admissibilité s'est par la suite manifestée de plusieurs manières. A l'aide des expériences sur la réfraction de quelques

* Voir p. 281.

liquides et de leurs vapeurs, que j'ai faites moi-même, j'ai calculé la constante de réfraction correspondante à la raie du sodium, tandis que A a été calculé par la formule plus simple $N^2 = A^2 + \frac{a}{\lambda^2}$. Voici les résultats:

	Liquide à 10°	Vapeur à 100°
Alcool	0,00585	0,00644
Éther éthylique . .	636	623
Chloroforme . . .	413	409
Iodure d'éthyle . .	551	579
Sulfure de carbone	1615	1732
Éther acétique . .	536	550.

On doit considérer comme assez satisfaisante la concordance des valeurs de D pour les deux états physiques. Quand on ne peut pas employer les séries (14) qui représentent φ_1 et ψ_1, ces fonctions peuvent être exprimées par* * NOTE 15

$$\varphi_1 = 3\frac{\sin \alpha r - \alpha r \cos \alpha r}{\alpha^3}, \quad \psi_1 = \cos \alpha r + \alpha r \sin \alpha r,$$

si l'on pose pour simplifier $\mu = \alpha^2$. Si par exemple μ est égal à zéro au dehors de la surface de séparation $r = \varepsilon$ et à α^2 dans l'intérieur, on aura

$$s_1 \varepsilon^3 + \sigma_1 = s_1' \cdot 3\frac{\sin \alpha\varepsilon - \alpha\varepsilon \cos \alpha\varepsilon}{\alpha^3},$$

$$3 s_1 \varepsilon^2 = s_1' \frac{3\varepsilon}{\alpha} \sin \alpha\varepsilon,$$

d'où

$$\frac{\sigma_1}{s_1} = q_1 = -\varepsilon^3 - \frac{3\varepsilon^2}{\alpha} \cot \alpha\varepsilon + \frac{3\varepsilon}{\alpha^2}.$$

Il en résulte que q_1 peut prendre une valeur quelconque entre $-\infty$ et $+\infty$, si la longueur d'onde λ et par suite aussi α parcourent toute la série des valeurs. En vertu de la seconde équation (35), il y a certaines

valeurs qui rendent λN^2 négatif et par suite N imaginaire, ce qui dans ces calculs représente une absorption.

Si l'on fait l'hypothèse que μ soit fini à l'intérieur de la surface de séparation $r = \varepsilon$, et que les séries soient convergentes jusqu'à une très petite distance du centre, l'absorption n'aura lieu que pour certaines longueurs d'onde isolées et déterminées, de sorte que nous obtenons un spectre de dispersion accompagné de raies d'absorption comme à l'ordinaire.

La théorie exposée ici n'exclut donc pas la possibilité de l'absorption, mais d'autre part on ne peut pas déduire de nos hypothèses une absorption incomplète, correspondant au cas où N prend la forme complexe $a+bi$. Si donc on veut déduire théoriquement la dispersion anomale, il faut généraliser les calculs, de manière qu'ils puissent aussi s'appliquer au cas d'un système d'atomes correspondant à un corps composé ou à un mélange. C'est seulement quand on aura fait cela qu'on pourra savoir s'il est encore nécessaire de changer la base même de la théorie, en supposant que μ soit une variable complexe, ce qui reviendrait à ajouter aux équations originelles qui représentent le mouvement de la lumière un terme contenant la dérivée première par rapport à t. Dans ce cas ces équations prendraient la forme que j'ai déjà indiquée dans mon mémoire sur l'identité des vibrations lumineuses et des courants électriques (Vidensk. Selsk. Oversigt 1867, Nr. 1, 6e mémoire de cette édition). Mais après avoir démontré par les méthodes employées ici la possibilité du calcul du mouvement lumineux dans l'intérieur des corps, on reconnaîtra surtout qu'un vaste champ reste ouvert aux recherches ultérieures.

NOTES.

NOTE **1.** Une analyse du mémoire se trouve dans les „Fortschritte der Physik", t. XXXIX (2e fascicule), p. 15—17.

NOTE **2.** Voir le quatrième mémoire, p. 103—105.

NOTE **3.** C'est-à-dire que les composantes peuvent être exprimées par $e^{\lambda it}\varphi$, où φ est une fonction de x, y, z.

NOTE **4.** On suppose que l'origine du système des coordonnées est au centre.

Les conditions relatives aux limites dont il s'agit dans ce qui suit peuvent toutes être déduites en introduisant les coordonnées polaires et en faisant la remarque que seules les dérivées par rapport à r peuvent devenir infinies.

NOTE **5.** $\frac{\partial V_n^m}{\partial r}$ désigne ici la dérivée de V_n^m dans la direction de r et non pas la dérivée partielle. L'équation

$$\frac{\partial V_n^m}{\partial r} = -\frac{n+1}{r} V_n^m$$

exprime seulement que V_n^m est une fonction homogène du degré $-(n+1)$ par rapport à x, y, z.

NOTE **6.** On obtient par différentiation de l'équation (13)

$$\frac{d^3 f_n}{dr^3} - \frac{2n}{r}\frac{d^2 f_n}{dr^2} + \left(\mu + \frac{2n}{r^2}\right)\frac{df_n}{dr} = 0,$$

et, si l'on pose $\dfrac{df_n}{dr} = r^\alpha g_n$,

$$r^\alpha \frac{d^2 g_n}{dr^2} - 2(n-\alpha) r^{\alpha-1}\frac{dg_n}{dr} + \left(\mu + \frac{\alpha^2 - \alpha(2n+1) + 2n}{r^2}\right) r^\alpha g_n = 0.$$

Mais on ramènera cette équation à la forme de l'équation (13) en posant

$$\alpha = \begin{cases} 1, \\ 2n, \end{cases}$$

et l'on obtiendra alors

$$(1) \qquad \frac{d^2 g_n}{dr^2} - \frac{2(n-1)}{r}\frac{dg_n}{dr} + \mu g_n = 0,$$

$$(2) \qquad \frac{d^2 g_n}{dr^2} + \frac{2n}{r}\frac{dg_n}{dr} + \mu g_n = 0.$$

On en tire dans le premier cas

$$(3) \qquad g_n = \frac{1}{r}\frac{df_n}{dr} = f_{n-1},$$

et dans le second

$$(4) \qquad g_n = \frac{1}{r^{2n}}\frac{df_n}{dr} = f_{(-n)}.$$

De l'équation (4) on peut déduire

$$r^{-2n} f_n = \frac{df_{(-n)}}{dr} = \frac{d\left(\frac{1}{r^{2n}}\frac{df_n}{dr}\right)}{dr} = \frac{d\left(\frac{1}{r^{2n-1}} f_{n-1}\right)}{dr},$$

ou, en remplaçant n par $n+1$,

$$(5) \qquad r^{-(2n+2)} f_{n+1} = \frac{d\left(\frac{1}{r^{2n+1}} f_n\right)}{dr}.$$

Les relations données dans le mémoire peuvent facilement être déduites des équations (3) et (5).

NOTE 7. On obtient l'équation (18) en différentiant l'équation

$$zV_0^0 + r^2 \frac{\partial V_0^0}{\partial z} = 0$$

$(n-m)$ fois par rapport à x et m fois par rapport à y, et en se servant de (17), où n est remplacé par $(n-1)$.

L'équation (19) peut être déduite de (17) si l'on remarque que

$$\frac{\partial V_n^m}{\partial r} = -\frac{n+1}{r} V_n^m = \frac{\partial V_n^m}{\partial x}\frac{x}{r} + \frac{\partial V_n^m}{\partial y}\frac{y}{r} + \frac{\partial V_n^m}{\partial z}\frac{z}{r}$$

$$= V_{n+1}^{m}\frac{x}{r} + V_{n+1}^{m+1}\frac{y}{r} + \frac{\partial V_n^m}{\partial z}\frac{z}{r}.$$

NOTE 8. Si l'on introduit les expressions de ξ, η, ζ, ρ dans les équations (8), (9), (10), on obtiendra en égalant les coefficients de V_n^m et $\frac{\partial V_{n-1}^m}{\partial z}$, dans les deux membres des équations ainsi obtenues et en se servant des équations (17) et (18),

$$\left[r^2\xi_n^m + \frac{r^2\rho_{n-1}^m}{2n-1} + \frac{(n+1)^2-m^2}{2n+3}\rho_{n+1}^m - \frac{(m+2)(m+1)}{2n+3}\rho_{n+1}^{m+2}\right] = 0,$$

$$\left[r^2\eta_n^m + \frac{r^2\rho_{n-1}^{m-1}}{2n-1} - \frac{(n-m+2)(n-m+1)}{2n+3}\rho_{n+1}^{m-1} + \frac{(2n-m+1)(m+1)}{2n+3}\rho_{n+1}^{m+1}\right] = 0,$$

$$\left[r^2\zeta_n^m + \frac{r^2\rho_{n-1}^m}{2n-1} - \frac{(n-m+1)(n-m)}{2n+3}\rho_{n+1}^m - \frac{(m+2)(m+1)}{2n+3}\rho_{n+1}^{m+2}\right] = 0.$$

En retranchant la troisième équation de la première, on obtient

$$\left[r^2(\xi_n^m - \zeta_n^m) + \frac{(n-m+1)(2n+1)}{2n+3}\rho_{n+1}^m\right] = 0. \quad (A)$$

Si l'on augmente d'une unité l'indice m dans la seconde équation et si l'on en soustrait la troisième, on obtient

$$\left[r^2(\eta_n^{m+1} - \zeta_n^m) + \frac{(m+2)(2n+1)}{2n+3}\rho_{n+1}^{m+2}\right] = 0. \quad (B)$$

Si maintenant l'on diminue dans la formule (B) m de deux unités, on obtiendra la première formule du mémoire en multipliant la formule (A) par m, la formule (B) par $(n-m+1)$, en les retranchant l'une de l'autre, et en divisant le résultat par r^2.

On voit que dans tout ceci on ne s'est pas servi des équations (20) et (21), dont l'application amènerait à de très longs calculs.

La seconde formule peut être déduite par un procédé analogue. On se sert dans ce cas de la condition à la limite $\left[\frac{\partial(r\xi)}{\partial r}-\frac{\partial\rho}{\partial x}\right]=0$ et des conditions analogues en remplaçant partout $\frac{\partial\rho_n^m}{\partial x}$ et les expressions analogues par $\frac{x}{r}\frac{d\rho_n^m}{dr}$ et par les expressions analogues.

On obtiendra

$$\left[r^{n+1}\frac{d(\xi_n^m r^{-n})}{dr}+\frac{r}{2n-1}\frac{d\rho_{n-1}^m}{dr}+\frac{(n+1)^2-m^2}{2n+3}\frac{d\rho_{n+1}^m}{rdr}\right.$$
$$\left.-\frac{(m+2)(m+1)}{2n+3}\frac{d\rho_{n+1}^{m+2}}{rdr}-\rho_{n-1}^m\right]=0,$$

$$\left[r^{n+1}\frac{d(\eta_n^m r^{-n})}{dr}+\frac{rd\rho_{n-1}^{m-1}}{(2n-1)dr}-\frac{(n-m+2)(n-m+1)}{2n+3}\frac{d\rho_{n+1}^{m-1}}{rdr}\right.$$
$$\left.+\frac{(2n-m+1)(m+1)}{2n+3}\frac{d\rho_{n+1}^{m+1}}{rdr}-\rho_{n-1}^{m-1}\right]=0,$$

$$\left[r^{n+1}\frac{d(\zeta_n^m r^{-n})}{dr}+\frac{r}{2n-1}\frac{d\rho_{n-1}^m}{dr}-\frac{(n-m+1)(n-m)}{2n+3}\frac{d\rho_{n+1}^m}{rdr}\right.$$
$$\left.-\frac{(m+2)(m+1)}{2n+3}\frac{d\rho_{n+1}^{m+2}}{rdr}-\rho_{n-1}^m\right]=0.$$

Par un procédé semblable à celui qu'on a employé précédemment, on en déduira

$$\left[m \frac{d}{dr}(r^{-n}(\xi_n^m - \zeta_n^m) - (n-m+1)\frac{d}{dr}(r^{-n}(\eta_n^{m-1} - \zeta_n^{m-2}))\right] = 0,$$

équation qui peut facilement être transformée en celle du mémoire.

NOTE **9.** Dans ce qui suit, on considère comme unité de longueur δ ou une quantité dont la grandeur est du même ordre que celui de δ. De cette manière λ devient une quantité très grande, tandis que l et μ_δ sont très petites.

NOTE **10.** On néglige les termes dans lesquels entre μ comme facteur, cette quantité étant considérée comme infiniment petite.

NOTE **11.** On ne peut pas reconnaître pour quelle raison il n'y aurait pas de réfraction, μ étant partout infiniment petit.

Car les quantités p_1 et q_1, qui entrent dans l'expression (34), sont, en vertu des équations (24) et (27), fonctions des rapports des quantités μ correspondantes aux couches voisines, ou bien des indices de réfraction de ces couches. Mais bien que les μ soient infiniment petits, leurs rapports peuvent avoir des valeurs finies différentes de zéro.

La supposition de Lorenz, que l'indice de réfraction devient infini à l'intérieur des molécules, ne peut donc être considérée que comme une hypothèse arbitraire sur la constitution des molécules.

NOTE **12.** On fait ici la supposition que la molécule n'est composée que de deux couches.

NOTE **13.** Aucune des quantités ξ, η, ζ ne peut devenir infinie.

NOTE 14. f_n doit s'évanouir à l'origine; car dans le cas contraire les fonctions ξ, η, ζ deviendraient infinies en ce point.

NOTE 15. On reconnaît immédiatement que l'on a $\varphi_0 = \frac{\sin ar}{a}$, $\psi_0 = \cos ar$, et les deux expressions de φ_1 et ψ_1 peuvent alors en être déduites au moyen des deux dernières formules (16). Ces formules donneront aussi des expressions analogues pour φ_n et ψ_n.

SUR

LA LUMIÈRE RÉFLÉCHIE ET RÉFRACTÉE

PAR UNE SPHÈRE TRANSPARENTE.

SUR LA LUMIÈRE RÉFLÉCHIE ET RÉFRACTÉE PAR UNE SPHÈRE TRANSPARENTE.*

* NOTE 1.

VIDENSK. SELSK. SKR., T. VI (6). COPENHAGUE 1890.

Aussi longtemps que nous considérerons la lumière comme formée de rayons qui interfèrent, se réfractent et se réfléchissent à la surface des corps suivant certaines lois, notre conception du mouvement lumineux ne sera qu'élémentaire et fragmentaire, puisque par là nous décomposons la loi générale de ce mouvement en lois particulières et séparons des phénomènes qui sont essentiellement congénères. Cette manière de voir élémentaire a et aura cependant toujours une grande importance; mais tant que nous ne pourrons pas aller au delà, beaucoup de problèmes de l'optique resteront non résolus et insolubles.

La loi générale du mouvement de la lumière, de même que les lois de la propagation de l'électricité et de l'élasticité, est d'une forme simple, car elle peut être exprimée par trois équations linéaires aux dérivées partielles dn deuxième ordre, où les trois composantes du mouvement vibratoire sont les variables dépendantes, les coordonnées de l'espace et le temps étant les variables indépendantes. Tous les problèmes de la propagation de la lumière doivent pouvoir être ramenés à l'intégration des ces équations.

Dans un mémoire intitulé „Ueber die Reflexion an einer Kugelfläche“, M. A. Clebsch * a cherché à déterminer la réflexion de la lumière par des surfaces sphériques à réflexion totale en partant des équations différentielles de la théorie de l'élasticité; mais cet habile mathématicien n'a pas réussi à vaincre la difficulté principale proprement dite, et voici ce qu'il dit à ce sujet dans son introduction: „Die Resultate der ganzen Untersuchung sind sehr verwickelt, und namentlich für den in der Optik wichtigen Fall einer sehr kleinen Wellenlänge scheint es sehr schwer dieselbe einfach in passender Form darzustellen.“ Par contre, il ajoute: „Der entgegengesetzte Fall eines gegen die Wellenlänge sehr kleinen Radius der reflectirenden Kugel ist dagegen für eine Annäherung sehr geeignet.“

Les équations différentielles qui sont le point de départ des présentes recherches ont été exposées et établies dans plusieurs de mes travaux antérieurs. Elles se distinguent de celles de la théorie de l'élasticité en ceci, qu'elles excluent la possibilité de vibrations longitudinales, et comme elles sont applicables à chaque point de tout milieu transparent hétérogène, les conditions limites du passage d'un corps dans un autre se laisseront facilement déduire des équations différentielles elles-mêmes.

Dans un travail antérieur „Théorie de la dispersion“ **, j'ai déduit des mêmes équations différentielles des formules qui servent à déterminer le mouvement de la lumière dans un milieu composé de couches sphériques concentriques, et j'ai alors appliqué le calcul à un système de petites sphères séparées par le vide et à de grandes distances les unes des autres, afin de déterminer

* Journal de Crelle, t. 61, p. 195. 1863.

** Voir le mémoire précédent.

la loi suivant laquelle la réfraction de la lumière dépend de la densité du système. Plus tard, je me suis servi des mêmes développements en séries pour résoudre le problème que j'ai ici en vue, à savoir la détermination du mouvement de la lumière lorsqu'*une sphère homogène, transparente et isotrope est éclairée par des ondes lumineuses planes et parallèles,* et j'ai réussi également par cette voie à obtenir les mêmes résultats qui vont être exposés ici. Mais j'ai préféré employer dans ce qui suit une autre méthode plus simple, qui me permettra en même temps, pour faciliter la lecture, de ne pas présupposer la connaissance de mon premier travail.

---

1. Conditions aux limites.

Désignons par ξ, η, ζ les composantes des vibrations lumineuses, correspondant au temps t et aux coordonnées x, y, z de l'espace. Si l'on introduit en outre les notations

$$\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \theta = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z},$$

les lois du mouvement de la lumière dans un milieu transparent quelconque pourront être exprimées par les trois équations différentielles

$$\left.\begin{array}{c} \Delta_2 \xi - \dfrac{\partial \theta}{\partial x} = \dfrac{1}{\omega^2} \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}, \quad \Delta_2 \eta - \dfrac{\partial \theta}{\partial y} = \dfrac{1}{\omega^2} \dfrac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}, \\ \Delta_2 \zeta - \dfrac{\partial \theta}{\partial z} = \dfrac{1}{\omega^2} \dfrac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}, \end{array}\right\} \qquad (1)$$

ω étant en général une variable dépendante de x, y, z, qui correspond à la vitesse de la lumière au point x, y, z, en tant qu'on peut considérer cette vitesse comme constante dans un très petit espace.

Le problème dont il s'agit consiste à intégrer ces équations, dans la supposition que ω a deux valeurs constantes dont l'une à l'intérieur et l'autre à l'extérieur d'une sphère donnée, et qui passent de l'une à l'autre par un changement discontinu à la surface de la sphère. Ce changement discontinu peut être regardé comme dû à ce qu'une couche superficielle passe, avec une variation continue de ω, d'une épaisseur finie à une épaisseur nulle, ω étant considérée comme une fonction de la distance r au centre de la sphère. Dans ce passage, les composantes du mouvement vibratoire doivent, ici comme partout, rester finies, tandis que leurs coefficients différentiels peuvent devenir infinis par rapport à r*. C'est pourquoi les composantes et leurs coefficients différentiels, lorsque l'épaisseur de la couche limite est réduite à 0, passent en général brusquement d'une valeur à une autre en traversant cette couche; cependant quelques-unes de leurs combinaisons peuvent conserver leur valeur sans changement.

NOTE 2.

Pour chercher ces combinaisons, au lieu des composantes par rapport au système des axes fixes, je préfère employer la projection des vibrations sur le rayon, la projection perpendiculaire à cette dernière dans le plan passant par le rayon et l'axe des x, et la projection perpendiculaire aux deux précédentes et, par conséquent, à l'axe des x.

NOTE 3. Si l'on exprime en coordonnées polaires*

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi\cos\psi, \quad z = r\sin\varphi\sin\psi,$$

et si l'on désigne les nouvelles composantes par $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, $\bar{\zeta}$, celles-ci seront déterminées par les équations

$$\left.\begin{aligned}\bar{\xi} &= \cos\varphi\,\xi + \sin\varphi\cos\psi\,\eta + \sin\varphi\sin\psi\,\zeta,\\ \bar{\eta} &= -\sin\varphi\,\xi + \cos\varphi\cos\psi\,\eta + \cos\varphi\sin\psi\,\zeta,\\ \bar{\zeta} &= \qquad -\sin\psi\,\eta + \cos\psi\,\zeta.\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

En multipliant les équations (1) respectivement par x, y, z et en les ajoutant, on obtiendra

$$\Delta_2(r\xi) - \frac{1}{r}\frac{\partial(r^2\theta)}{\partial r} = \frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2(r\xi)}{\partial t^2}*;$$ * NOTE 4.

d'où il suit que

$$\frac{\partial^2(r^2\xi)}{\partial r^2} - \frac{\partial(r^2\theta)}{\partial r},$$

lorsque Δ_2 est exprimé en coordonnées polaires, se laisse exprimer en termes qui restent finis*, même si l'épaisseur de la couche limite est réduite à zéro. * NOTE 5.

Mais il en résulte que

$$\frac{\partial(r^2\xi)}{\partial r} - r^2\theta$$

est une fonction continue, qui par suite reste aussi finie sur la surface limite, puisqu'elle est finie des deux côtés de celle-ci. Par conséquent

$$\frac{d\xi}{dr} - \theta$$

est également partout une quantité finie.

Si l'on multiplie en outre les équations (1) respectivement par $-\sin\varphi$, $\cos\varphi\cos\psi$, $\cos\varphi\sin\psi$, et qu'on les ajoute, on obtient

$$\frac{\partial^2(r\eta)}{\partial r^2} - \frac{\partial\theta}{\partial\varphi}$$

exprimé en termes qui restent partout finis. On trouve de même en multipliant les équations (1) par 0, $-\sin\psi$, $\cos\psi$ et en les additionnant

$$\frac{\partial^2(r\overline{\zeta})}{\partial r^2} - \frac{1}{\sin\varphi}\frac{\partial\theta}{\partial\psi}$$

exprimé en termes partout finis.

Nous avons ainsi trouvé trois combinaisons qui sont partout finies. En éliminant θ, on voit que les expressions

$$\frac{\partial^2(r\overline{\eta})}{\partial r^2} - \frac{\partial^2\overline{\xi}}{\partial\varphi\,\partial r} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2(r\overline{\zeta})}{\partial r^2} - \frac{1}{\sin\varphi}\frac{\partial^2\overline{\xi}}{\partial\psi\,\partial r}$$

sont partout finies, d'où il suit que

$$\frac{\partial(r\overline{\eta})}{\partial r} - \frac{\partial\overline{\xi}}{\partial\varphi} \quad \text{et} \quad \frac{\partial(r\overline{\zeta})}{\partial r} - \frac{1}{\sin\varphi}\frac{\partial\overline{\xi}}{\partial\psi}$$

sont des fonctions continues qui ne changent pas en passant d'un des côtés de la surface limite de la sphère à l'autre. C'est ce que j'exprimerai par

$$\left[\frac{\partial(r\overline{\eta})}{\partial r} - \frac{\partial\overline{\xi}}{\partial\varphi}\right] = 0, \quad \left[\frac{\partial(r\overline{\zeta})}{\partial r} - \frac{1}{\sin\varphi}\frac{\partial\overline{\xi}}{\partial\psi}\right] = 0. \qquad (3)$$

Remarquons en outre que ces mêmes quantités, étant des fonctions continues et partout finies en dehors de la surface limite, doivent aussi être finies sur cette surface. Mais il en résulte que $r\overline{\eta}$ et $r\overline{\zeta}$ doivent être continus, de sorte qu'en conservant la même notation que ci-dessus, on aura

$$[\overline{\eta}] = 0, \quad [\overline{\zeta}] = 0. \qquad (4)$$

On déduit les conditions aux limites correspondant à $r = 0$ et à $r = \infty$ en remarquant que le mouvement de la lumière est partout fini, par conséquent aussi pour $r = 0$, et qu'à une distance infinie de la sphère on ne trouve, outre la lumière incidente, que celle qui émane de la sphère, mais aucune qui se dirige vers elle.

2. Développement en séries de fonctions sphériques.

La lumière qui tombe sur la sphère est supposée formée d'ondes planes parallèles. Celles-ci peuvent en général renfermer un ensemble de vibrations qui diffèrent par leur amplitude, leur direction dans le plan des ondes, leur durée et leurs phases; mais ce cas général se laisse facilement déduire du cas particulier où les composantes du mouvement vibratoire, que nous désignerons par ξ_0, η_0, ζ_0, sont déterminées hors de la sphère par

$$\xi_0 = 0, \quad \eta_0 = e^{(kt-lx)i}, \quad \zeta_0 = 0. \tag{5}$$

La forme exponentielle est choisie ici comme étant la plus simple; les vibrations qui ont l'amplitude 1 se font dans la direction de l'axe des y et se propagent dans la direction de l'axe des x avec la vitesse constante $\frac{k}{l} = \Omega$, la longueur d'onde $\frac{2\pi}{l} = \lambda$ et la durée $\frac{2\pi}{k} = T$.

Ayant ainsi, *en dehors* de la sphère, séparé la lumière incidente de celle qui est produite par le changement de vitesse à la surface de cette sphère, nous posons

$$\xi = \xi_0 + \xi_e, \quad \eta = \eta_0 + \eta_e, \quad \zeta = \zeta_0 + \zeta_e, \tag{6}$$

tandis que, *en dedans* de cette surface, nous posons

$$\xi = \xi', \quad \eta = \eta', \quad \zeta = \zeta', \tag{7}$$

où l', Ω', λ' remplacent aussi les quantités correspondantes non accentuées en dehors de la sphère. Si l'on désigne en outre le rapport des deux vitesses Ω, Ω' par N (indice de réfraction de la sphère), on aura

$$\Omega = N\Omega', \quad l'^{*} = Nl, \quad \lambda = N\lambda'. \tag{8}$$ * NOTE 6.

Les composantes ξ, η, ζ, tant en dehors qu'en dedans de la surface de la sphère, sont liées entre elles par

l'équation $\theta = 0$, qui pour ω constant résulte des équations (1), et par suite elles peuvent être regardées comme dépendant seulement de deux grandeurs Q et S en dehors de la sphère, ou Q' et S' en dedans de la sphère. On pourra en effet poser

$$\left.\begin{aligned} \xi_e &= \frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z}, \quad \eta_e = \frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial x}, \quad \zeta_e = \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}, \\ A &= z\frac{\partial Q}{\partial y} - y\frac{\partial Q}{\partial z} + xS, \quad B = x\frac{\partial Q}{\partial z} - z\frac{\partial Q}{\partial x} + yS, \\ C &= y\frac{\partial Q}{\partial x} - x\frac{\partial Q}{\partial y} + zS, \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

et ξ', η', ζ' pourront aussi être exprimés d'une manière analogue. Les équations (1) seront alors satisfaites en supposant que l'on ait

* NOTE 7.

$$\Delta_2 Q + l^2 Q = 0, \quad \Delta_2 S + l^2 S = 0^*, \qquad (10)$$

$$\Delta_2 Q' + l'^2 Q' = 0, \quad \Delta_2 S' + l'^2 S' = 0. \qquad (11)$$

Il est bon d'observer que les deux projections radiales

$$x\xi_e + y\eta_e + z\zeta_e$$

et

$$x\left(\frac{\partial \zeta_e}{\partial y} - \frac{\partial \eta_e}{\partial z}\right) + y\left(\frac{\partial \xi_e}{\partial z} - \frac{\partial \zeta_e}{\partial x}\right) + z\left(\frac{\partial \eta_e}{\partial x} - \frac{\partial \xi_e}{\partial y}\right)$$

peuvent, à l'aide des équations (9), être transformées en

* NOTE 8.

$$-r^2\Delta_2 Q + r\frac{\partial^2(rQ)}{\partial r^2} = -\frac{1}{\sin\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\sin\varphi\frac{\partial Q}{\partial\varphi}\right) - \frac{1}{\sin^2\varphi}\frac{\partial^2 Q}{\partial\psi^2}^*$$

et

$$-r^2\Delta_2 S + r\frac{\partial^2(rS)}{\partial r^2} = -\frac{1}{\sin\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\sin\varphi\frac{\partial S}{\partial\varphi}\right) - \frac{1}{\sin^2\varphi}\frac{\partial^2 S}{\partial\psi^2}.$$

On voit par là que, lorsque Q et S sont développées en séries de fonctions sphériques Q_n et S_n, à savoir

$$Q = \Sigma Q_n, \quad S = \Sigma S_n,$$

les projections radiales ci-dessus mentionnées seront déterminées respectivement par

$$\Sigma n(n+1)Q_n \quad \text{et} \quad \Sigma n(n+1)S_n.$$

On obtient un résultat analogue pour l'espace en dedans de la sphère.

Les composantes $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, $\bar{\zeta}$ introduites dans le chapitre précédent peuvent par analogie avec (6), pour des points en dehors de la sphère, être exprimées par

$$\bar{\xi} = \bar{\xi}_0 + \bar{\xi}_e, \quad \bar{\eta} = \bar{\eta}_0 + \bar{\eta}_e, \quad \bar{\zeta} = \bar{\zeta}_0 + \bar{\zeta}_e,$$

ces nouvelles composantes étant déterminées par

$$\left.\begin{array}{l} \bar{\xi}_0 = \sin\varphi\cos\psi\, e^{(kt-lx)i}, \quad \bar{\eta}_0 = \cos\varphi\cos\psi\, e^{(kt-lx)i}, \\ \qquad \bar{\zeta}_0 = -\sin\psi\, e^{(kt-lx)i}, \end{array}\right\} \quad (13)$$

$$\left.\begin{array}{l} \bar{\xi}_e = \cos\varphi\,\xi_e + \sin\varphi\cos\psi\,\eta_e + \sin\varphi\sin\psi\,\zeta_e, \\ \bar{\eta}_e = -\sin\varphi\,\xi_e + \cos\varphi\cos\psi\,\eta_e + \cos\varphi\sin\psi\,\zeta_e, \\ \bar{\zeta}_e = -\sin\psi\,\eta_e + \cos\psi\,\zeta_e. \end{array}\right\} \quad (14)$$

Si maintenant, pour abréger, on introduit dans ce qui suit les notations

$$lr = a, \quad l'r = a', \quad lQ = K, \quad l'Q' = K' * \qquad (15)$$ * NOTE 9.

et, R étant le rayon de la sphère donnée,

$$lR = \alpha, \quad l'R = \alpha', \qquad (16)$$

on obtiendra par les équations (9) et à l'aide des équations (10) les valeurs suivantes

$$\left.\begin{array}{l} \bar{\xi}_e = \dfrac{\partial^2(aK)}{\partial a^2} + aK, \\ \bar{\eta}_e = \dfrac{1}{a}\dfrac{\partial^2(aK)}{\partial\varphi\,\partial a} + \dfrac{1}{\sin\varphi}\dfrac{\partial S}{\partial\psi}, \\ \bar{\zeta}_e = \dfrac{1}{a\sin\varphi}\dfrac{\partial^2(aK)}{\partial\psi\,\partial a} - \dfrac{\partial S}{\partial\varphi}, \end{array}\right\} \quad (17)$$

de même qu'on trouve pour un point intérieur les valeurs correspondantes

$$\left.\begin{aligned}\bar{\xi}' &= \frac{\partial^2(a'K')}{\partial a'^2} + a'K', \\ \bar{\eta}' &= \frac{1}{a'}\frac{\partial^2(a'K')}{\partial\varphi\,\partial a'} + \frac{1}{\sin\varphi}\frac{\partial S'}{\partial\psi}, \\ \bar{\zeta}' &= \frac{1}{a'\sin\varphi}\frac{\partial^2(a'K')}{\partial\psi\,\partial a'} - \frac{\partial S'}{\partial\varphi}.\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Il s'agit maintenant de développer ces composantes en séries de fonctions sphériques. En général, lorsqu'une fonction $f(x)$ peut être ainsi développée, le développement est, comme on sait, de la forme

$$f(x) = \sum_0^\infty \frac{2n+1}{2} P_n(x) \int_{-1}^{+1} f(u) P_n(u)\, du,$$

la somme étant prise pour toutes les valeurs de n depuis $n = 0$ jusqu'à $n = \infty$, et

$$(x) = \frac{1\cdot3\ldots(2n-1)}{1\cdot2\ldots n}\left(x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot4(2n-1)(2n-3)}x^{n-4} - \ldots\right).$$

Si, à présent, nous cherchons à développer les valeurs que les équations (13) donnent pour $\bar{\xi}_0$, $\bar{\eta}_0$, $\bar{\zeta}_0$, en y posant $lx = a\cos\varphi$, nous aurons, d'après ce qui précède,

$$e^{-a\cos\varphi i} = \sum_0^\infty \frac{2n+1}{2} P_n(\cos\varphi) \int_{-1}^{+1} e^{-aui} P_n(u)\, du.$$

L'intégrale définie que renferme cette équation peut s'exprimer par la fonction de Bessel $J_{n+\frac{1}{2}}(a)$, ou, ce que je préfère ici, par une autre fonction $v_n(a)$ qui ne diffère de celle de Bessel que par un facteur, la valeur en étant

$$v_n(a) = \sqrt{\frac{\pi a}{2}}\, J_{n+\frac{1}{2}}(a).$$

On pourra alors, d'après la théorie des fonctions de Bessel, exprimer $r_n(a)$ par

$$r_n(a) = \frac{a^{n+1}}{2^{n+1}\, n!}\int_{-1}^{1} e^{aui}(1-u^2)^n du.$$

Cette intégrale devient par une intégration par parties n fois répétée

$$r_n(a) = \frac{a}{2^{n+1}\, n!\, i^n}\int_{-1}^{1} e^{aui}\frac{d^n(1-u^2)^n}{du^n}du,$$

valeur qui, à l'aide d'une autre expression connue de P_n, à savoir

$$P_n(u) = \frac{(-1)^n}{2^n\, n!}\frac{d^n(1-u^2)^n}{du^n},$$

peut aussi être mise sous la forme

$$r_n(a) = \frac{a}{2}\, i^n \int_{-1}^{1} e^{aui} P_n(u)\, du. \qquad (19)$$

De cette manière on obtient

$$e^{-a\cos\varphi i} = \frac{1}{a}\sum_{0}^{\infty}(2n+1)\, P_n(\cos\varphi)\, e^{-\frac{n\pi}{2}i}\, r_n(a). \qquad (20)$$

On remarquera que la fonction $r_n(a)$ satisfait à l'équation différentielle

$$\frac{d^2 r_n(a)}{da^2} = \left(\frac{n(n+1)}{a^2} - 1\right) r_n(a), \qquad (21)$$

et que, développée suivant les puissances de a, elle donne la série

$$r_n(a) = \frac{a^{n+1}}{1\cdot 3\ldots(2n+1)}\left(1 - \frac{a^2}{2(2n+3)} + \frac{a^4}{2\cdot 4(2n+3)(2n+5)} - \ldots\right). \qquad (22)$$

Un autre développement en série, connu par la théorie des fonctions de Bessel, et où le nombre des termes est fini, est le suivant*: * NOTE 10.

$$\left.\begin{aligned} v_n(a) &= g_n(a)\sin\left(a-\frac{n\pi}{2}\right)+h_n(a)\cos\left(a-\frac{n\pi}{2}\right), \\ g_n(a) &= 1-\frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{2\cdot 4a^2}+\frac{(n-3)(n-2)\ldots(n+4)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8a^4}-\ldots, \\ h_n(a) &= \frac{n(n+1)}{2a}-\frac{(n-2)(n-1)\ldots(n+3)}{2\cdot 4\cdot 6a^3}+\ldots \end{aligned}\right\} \quad (23)$$

Si l'on désigne en outre par $w_n(a)$ une autre intégrale particulière de l'équation (21), et si l'on définit cette intégrale par le développement en série

$${}_n(a) = \frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{a^n}\left(1+\frac{a^2}{2(2n-1)}+\frac{a^4}{2\cdot 4(2n-1)(2n-3)}+\ldots\right), \quad (24)$$

cette fonction ne différera également d'une fonction de Bessel $J_{-n-\frac{1}{2}}(a)$ que par un facteur, et, avec les développements de g_n et de h_n donnés plus haut, elle pourra aussi être exprimée par

$$w_n(a) = g_n(a)\cos\left(a-\frac{n\pi}{2}\right)-h_n(a)\sin\left(a-\frac{n\pi}{2}\right). \quad (25)$$

Les valeurs données dans les équations (13) peuvent maintenant, à l'aide de la série (20), être déterminées comme il suit. On retire de cette série le premier terme correspondant à $n = 0$ et l'on pose

$$\dot{P}_n(\cos\varphi) = -\frac{1}{n(n+1)}\frac{1}{\sin\varphi}\frac{d}{d\varphi}\left(\sin\varphi\frac{dP_n(\cos\varphi)}{d\varphi}\right),$$

ce qui donne

$${}^{-a\cos\varphi i} = \frac{\sin a}{a}-\frac{1}{a}\sum_1^\infty\frac{2n+1}{n(n+1)}\frac{1}{\sin\varphi}\frac{d}{d\varphi}\left(\sin\varphi\frac{dP_n(\cos\varphi)}{d\varphi}\right)e^{-\frac{n\pi}{2}i}v_n(a).$$

En introduisant pour abréger les notations

$$\left.\begin{aligned} K_0 &= -i\frac{\cos\psi}{a}\frac{d}{d\varphi}\sum_1^\infty\frac{2n+1}{n(n+1)}\dot{P}_n(\cos\varphi)\,e^{\left(kt-\frac{n\pi}{2}\right)i}v_n(a), \\ S_0 &= -\frac{\sin\psi}{a}\frac{d}{d\varphi}\sum_1^\infty\frac{2n+1}{n(n+1)}\dot{P}_n(\cos\varphi)\,e^{\left(kt-\frac{n\pi}{2}\right)i}v_n(a), \end{aligned}\right\} \quad (26)$$

la multiplication de l'équation par $\cos\psi e^{kti} \sin\varphi d\varphi$ ou par $-\sin\psi e^{kti} \sin\varphi d\varphi$ et l'intégration des deux équations ainsi obtenues de $\varphi = 0$ à $\varphi = \varphi$ donneront

$$\left.\begin{aligned} K_0 &= -\frac{i\cos\psi}{a\sin\varphi}(-\sin a\cos\varphi - i\cos a + i e^{-a\cos\varphi i}) e^{kti}, \\ S_0 &= -\frac{\sin\psi}{a\sin\varphi}(-\sin a\cos\varphi - i\cos a + i e^{-a\cos\varphi i}) e^{kti}, \end{aligned}\right\} \quad (27)$$

d'où l'on tire finalement

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2(aK_0)}{\partial a^2} + aK_0 = \sin\varphi\cos\psi\, e^{(kt - a\cos\varphi)i} = \overline{\xi}_0, \\ &\frac{1}{a}\frac{\partial^2(aK_0)}{\partial\varphi\partial a} + \frac{1}{\sin\varphi}\frac{\partial S_0}{\partial\psi} = \cos\varphi\cos\psi\, e^{(kt - a\cos\varphi)i} = \overline{\eta}_0, \\ &\frac{1}{a\sin\varphi}\frac{\partial^2(aK_0)}{\partial\psi\partial a} - \frac{\partial S_0}{\partial\varphi} = -\sin\psi\, e^{(kt - a\cos\varphi)i} = \overline{\zeta}_0. \end{aligned}\right\} \quad (28)$$

Ces valeurs des composantes $\overline{\xi}_0$, $\overline{\eta}_0$, $\overline{\zeta}_0$ correspondent à celles qui sont données dans (17) pour les composantes $\overline{\xi}_e$, $\overline{\eta}_e$, $\overline{\zeta}_e$, K_0 et S_0 remplaçant K et S dans les équations (17). Nous avons, dans (26), les développements de K_0 et S_0 en séries de fonctions sphériques, et, comme il est facile de s'en assurer, ils doivent satisfaire aux mêmes équations différentielles que K et S, à savoir, d'après (10), $\Delta_2 K_0 + l^2 K_0 = 0$, $\Delta_2 S_0 + l^2 S_0 = 0$. Les développements de K et de S en séries de fonctions sphériques doivent donc être analogues à ceux de (26), l'intégrale particulière $v_n(a)$ de l'équation (21) étant remplacée ici par l'intégrale générale exprimée linéairement en $v_n(a)$ et $w_n(a)$. On obtient ainsi, avec les constantes encore indéterminées k_n, $\varkappa_n$, s_n, σ_n *, * NOTE

$$\left.\begin{aligned} K &= -i\frac{\cos\psi}{a}\frac{d}{d\varphi}\sum_1^\infty \frac{2n+1}{n(n+1)} P_n e^{\left(kt - \frac{n\pi}{2}\right)i}(k_n v_n(a) + \varkappa_n w_n(a)), \\ S &= -\frac{\sin\psi}{a}\frac{d}{d\varphi}\sum_1^\infty \frac{2n+1}{n(n+1)} P_n e^{\left(kt - \frac{n\pi}{2}\right)i}(s_n v_n(a) + \sigma_n w_n(a)), \end{aligned}\right\} \quad (29)$$

et d'une manière analogue pour un point intérieur

$$\left.\begin{aligned} K' &= -i\frac{\cos\psi}{a'}\frac{d}{d\varphi}\sum_{1}^{\infty}\frac{2n+1}{n(n+1)}P_n e^{\left(kt-\frac{n\pi}{2}\right)i}(k'_n v_n(a')+\varkappa'_n w_n(a')),\\ S' &= -\frac{\sin\psi}{a'}\frac{d}{d\varphi}\sum_{1}^{\infty}\frac{2n+1}{n(n+1)}P_n e^{\left(kt-\frac{n\pi}{2}\right)i}(s'_n v_n(a')+\sigma'_n w_n(a')). \end{aligned}\right\} \quad (30)$$

$P_n(\cos\varphi)$ est réduit ici à P_n.

Si nous prenons d'abord la condition limite correspondant à $a'=0$, on voit par (24) que $w_n(a')$ devient infini pour $a'=0$ et $n>0$, et, par conséquent, qu'il faut, pour que les valeurs de K' et S' soient finies, que

$$\varkappa'_n = 0, \quad \sigma'_n = 0.$$

A $a=\infty$ correspondent, d'après (23) et (25), $v_n(a) = \sin\left(a-\frac{n\pi}{2}\right)$, $w_n(a)=\cos\left(a-\frac{n\pi}{2}\right)$. A une distance infinie de la sphère, on doit donc avoir

$$2(k_n v_n(a)+\varkappa_n w_n(a))e^{\left(kt-\frac{n\pi}{2}\right)i} = (-k_n i+\varkappa_n)e^{(kt+a-n\pi)i}+(k_n i+\varkappa_n)e^{(kt-a)i}.$$

On voit par là qu'à cette distance le mouvement de la lumière se manifeste en général sous forme de fonctions périodiques de $kt+a$ et de $kt-a$, correspondant à deux mouvements opposés, l'un dirigé vers le centre de la sphère, l'autre partant du centre. Comme ce dernier mouvement, d'après les conditions que nous avons supposées, est le seul qui existe réellement, on doit avoir

$$-k_n i+\varkappa_n = 0, \quad \text{comme aussi} \quad -s_n i+\sigma_n = 0.$$

Les séries (29) et (30) se réduisent ainsi à

$$\left.\begin{aligned}
K &= -i\frac{\cos\psi}{a}\frac{d}{d\varphi}\sum_1^\infty \frac{2n+1}{n(n+1)} P_n e^{\left(kt-\frac{n\pi}{2}\right)i} k_n\left(v_n(a)+w_n(a)i\right),\\
S &= -\frac{\sin\psi}{a}\frac{d}{d\varphi}\sum_1^\infty \frac{2n+1}{n(n+1)} P_n e^{\left(kt-\frac{n\pi}{2}\right)i} s_n\left(v_n(a)+w_n(a)i\right),\\
K' &= -i\frac{\cos\psi}{a'}\frac{d}{d\varphi}\sum_1^\infty \frac{2n+1}{n(n+1)} P_n e^{\left(kt-\frac{n\pi}{2}\right)i} k_n' v_n(a'),\\
S' &= -\frac{\sin\psi}{a'}\frac{d}{d\varphi}\sum_1^\infty \frac{2n+1}{n(n+1)} P_n e^{\left(kt-\frac{n\pi}{2}\right)i} s_n' v_n(a').
\end{aligned}\right\}\quad(31)$$

Enfin nous avons aussi les conditions aux limites exposées dans (3) et (4), qui peuvent être exprimées par

$$\left.\begin{aligned}
\bar\eta = \bar\eta', \quad \bar\zeta = \bar\zeta',\\
\frac{\partial(a\bar\eta)}{\partial a} - \frac{\partial\bar\xi}{\partial\varphi} = \frac{\partial(a'\bar\eta')}{\partial a'} - \frac{\partial\bar\xi'}{\partial\varphi},\\
\frac{\partial(a\bar\zeta)}{\partial a} - \frac{1}{\sin\varphi}\frac{\partial\bar\xi}{\partial\psi} = \frac{\partial(a'\bar\zeta')}{\partial a'} - \frac{1}{\sin\varphi}\frac{\partial\bar\xi'}{\partial\psi},
\end{aligned}\right\}\quad \begin{aligned} a &= \alpha\\ a' &= \alpha'.\end{aligned}$$

En y substituant les valeurs de $\bar\xi$, $\bar\eta$, $\bar\zeta$ données par les équations (12), (17) et (28) et celles de $\bar\xi'$, $\bar\eta'$, $\bar\zeta'$ données par (18), ces conditions peuvent être mises sous la forme

$$\left.\begin{aligned}
a(K_0+K) &= a'K', & S_0+S &= S',\\
\frac{1}{a}\frac{\partial\cdot a(K_0+K)}{\partial a} &= \frac{1}{a'}\frac{\partial(a'K')}{\partial a'}, & \frac{\partial\cdot a(S_0+S)}{\partial a} &= \frac{\partial(a'S')}{\partial a'}
\end{aligned}\right\}\begin{aligned} a &= \alpha\\ a' &= \alpha'.\end{aligned}\quad(32)\ *$$

* NOTE 12.

On y développe ensuite K_0, S_0, K, S, K', S' suivant les séries (26) et (31), et on obtient ainsi quatre équations entre les coefficients. En désignant, pour abréger, les fonctions dérivées $\frac{dv_n(\alpha)}{d\alpha}$, $\frac{dw_n(\alpha)}{d\alpha}$, $\frac{dv_n(\alpha')}{d\alpha'}$ par $v_n'(\alpha)$, $w_n'(\alpha)$, $v_n'(\alpha')$, ces équations deviennent

$$
\begin{aligned}
N(v'_n(\alpha)+k_n(v'_n(\alpha)+w'_n(\alpha)i)) &= k'_n v'_n(\alpha'),\\
N(v_n(\alpha)+s_n(v_n(\alpha)+w_n(\alpha)i)) &= s'_n v_n(\alpha'),\\
v_n(\alpha)+k_n(v_n(\alpha)+w_n(\alpha)i) &= k'_n v_n(\alpha'),\\
v'_n(\alpha)+s_n(v'_n(\alpha)+w'_n(\alpha)i) &= s'_n v'_n(\alpha'),
\end{aligned}
$$

par lesquelles les coefficients peuvent être déterminés. En y faisant une petite réduction à l'aide de l'équation

* NOTE 13. $$w_n(\alpha)v'_n(\alpha)-w'_n(\alpha)v_n(\alpha) = 1, *$$

on obtient les valeurs suivantes

$$
\left.
\begin{aligned}
2k_n &= -1-\frac{(v_n(\alpha)-w_n(\alpha)i)v'_n(\alpha')-N(v'_n(\alpha)-w'_n(\alpha)i)v_n(\alpha')}{(v_n(\alpha)+w_n(\alpha)i)v'_n(\alpha')-N(v'_n(\alpha)+w'_n(\alpha)i)v_n(\alpha')},\\
2s_n &= -1-\frac{N(v_n(\alpha)-w_n(\alpha)i)v'_n(\alpha')-(v'_n(\alpha)-w'_n(\alpha)i)v_n(\alpha')}{N(v_n(\alpha)+w_n(\alpha)i)v'_n(\alpha')-(v'_n(\alpha)+w'_n(\alpha)i)v_n(\alpha')},
\end{aligned}
\right\} \quad (3
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
k'_n &= \frac{Ni}{(v_n(\alpha)+w_n(\alpha)i)v'_n(\alpha')-N(v'_n(\alpha)+w'_n(\alpha)i)v_n(\alpha')},\\
s'_n &= \frac{Ni}{N(v_n(\alpha)+w_n(\alpha)i)v'_n(\alpha')-(v'_n(\alpha)+w'_n(\alpha)i)v_n(\alpha')}.
\end{aligned}
\right\} \quad (34)
$$

Le problème est par là résolu, en tant que les composantes du mouvement vibratoire sont partout dans l'espace déterminées par des séries infinies avec des coefficients connus. On verra que les séries, sous cette forme, se prêtent bien au calcul, si α, qui correspond au contour de la sphère mesuré avec la longueur d'onde λ, est un petit nombre, ou si le point considéré est situé près du centre, tandis que si α est un très grand nombre, ce qui est pour ainsi dire le cas avec toutes les sphères visibles à l'œil nu, il sera en général nécessaire de transformer les séries de manière que les sommations puissent se faire avec une approximation suffisante. Je vais maintenant exposer d'abord les formules de sommation que j'aurai l'occasion d'employer.

3. *Formules de sommation.*

On trouvera dans le chapitre suivant des sommes qui peuvent être rapportées à la forme

$$\sum_{n_1}^{n_2} A_n e^{F_n i} \tag{35}$$

où n passe par toutes les valeurs entières comprises entre n_1 et n_2.

Les deux fonctions A_n et F_n sont telles que, si l'on y fait $n = \nu + z$, ces deux nouvelles variables étant également considérées comme des nombres entiers, on obtient les séries suivantes, qui sont convergentes dans les limites données:

$$A_n = A + B\frac{z}{a} + C\frac{z^2}{a^2} + \ldots, \quad F_n = Fa + Gz + H\frac{z^2}{a} + I\frac{z^3}{a^2} + \ldots \tag{36}$$

Les termes sont ici rangés suivant les puissances croissantes de z et les puissances décroissantes de la grandeur a. Celle-ci est regardée comme un nombre *très grand*, mais non infiniment grand, et, dans ce qui suit, toutes les grandeurs seront rangées suivant les puissances de a, de manière que celle qui renferme une puissance supérieure de a sera considérée comme une grandeur d'un ordre supérieur. Les coefficients A, B, ..., F, G, ... sont ici *au plus* des grandeurs du même ordre que l'unité (a^0). Le calcul aura en vue de présenter les résultats avec une exactitude telle que les grandeurs d'un ordre inférieur à l'unité seront seules regardées comme assez petites pour pouvoir être négligées.

Le nombre des termes de la série (35) est lui-même très grand et du même ordre que a. Les limites n_1 et n_2 sont *indéterminées et jusqu'à un certain degré arbi-*

traires, dépendant seulement, d'une part, des conditions de convergence des séries (36) et, de l'autre, de la condition que $n_2 - n_1$ doit être un nombre très grand. Ces grandeurs indéterminées et arbitraires que j'introduis ici, et pour lesquelles je me servirai dans ce qui suit de la désignation commune ω, sont définies par ce caractère qu'une fonction d'une pareille grandeur marque la limite vers laquelle converge la valeur moyenne de la même fonction d'une grandeur déterminée x, lorsqu'on fait passer x par une série de plus en plus grande de valeurs dans les limites tracées pour ω.

Ainsi, si nous partons des intégrales connues

$$\int_0^\infty e^{-x} x^{\mu-1}\, dx = \Gamma(\mu), \quad (37), \qquad \int_0^\infty e^{xi} x^{\mu-1}\, dx = \Gamma(\mu)\, e^{\frac{\mu\pi}{2}i}, \quad (38)$$

dont la première s'applique à toutes les valeurs positives de μ, et la seconde seulement aux valeurs positives plus petites que 1, on voit que pour $\mu < 1$ on doit aussi avoir

$$\int_0^\omega e^{xi} x^{\mu-1}\, dx = \Gamma(\mu)\, e^{\frac{\mu\pi}{2}i}, \qquad (39)$$

puisque

* NOTE 14.

$$\int_0^\omega e^{xi} x^{\mu-1}\, dx = \int_0^\infty e^{xi} x^{\mu-1}\, dx - \int_\omega^\infty e^{xi} x^{\mu-1}\, dx, \, *$$

où la dernière intégrale peut être développée par intégration partielle en une série semi-convergente dont la valeur moyenne, correspondant à différentes valeurs de ω, converge vers 0, lorsque la valeur moyenne est prise de la manière indiquée plus haut, dans des limites de plus en plus larges. Si en outre μ est plus grand que 1 dans l'intégrale (39), cet exposant peut par intégration partielle devenir plus petit que 1, et la valeur moyenne des termes périodiques en dehors de l'intégrale convergera également vers 0.

Par conséquent, l'équation (39), avec la portée donnée à la limite supérieure de ω, s'applique à *toutes* les valeurs positives de μ.

Comme autre exemple, qui trouvera une application dans ce qui suit, nous pouvons prendre la somme (35) réduite à sa forme la plus simple

$$\sum_{n_1}^{n_2} e^{ani} = \frac{e^{an_1 i} - e^{a(n_2+1)i}}{1 - e^{ai}}.*$$

* NOTE 15.

Le second membre doit également disparaître ici, si a n'est pas nul ni un multiple de 2π, car alors la somme devient $n_2 - n_1 + 1$, qui est bien indéterminée, mais en tout cas ne peut devenir nulle. De plus, si a est très petit ou très voisin d'un multiple de 2π, on ne saurait non plus regarder la somme comme nulle, car le nombre des termes est bien supposé très grand, mais non infiniment grand.

Si la somme est nulle, elle continuera aussi à l'être si on la différentie un nombre arbitraire de fois par rapport à a. On aura donc plus généralement

$$\sum_{n_1}^{n_2} n^m e^{ani} = 0*, \qquad (40)$$

* NOTE 16.

si m est un nombre entier ou nul et si a n'est pas nul ni très voisin de 0 ou d'un multiple de 2π.

Si nous considérons maintenant la somme donnée par les développements (35) et (36), on voit qu'elle peut être transformée en une série convergente avec des termes qui, en laissant de côté les facteurs constants, ont la forme

$$\sum_{n_1-\nu}^{n_2-\nu} z^m e^{Gzi}.$$

Par conséquent, si l'on ne peut avoir

$$G = 2p\pi, \tag{41}$$

pour $p = 0$ ou un nombre entier, et que $G - 2p\pi$ ne soit pas non plus très voisin de 0, la somme (35) disparaîtra en entier.

Est-on, au contraire, à même de trouver une valeur de ν qui permette de satisfaire à la condition ci-dessus (41), Gz peut alors être omis dans l'exposant, et la sommation être remplacée sans erreur sensible par une intégration. La somme (35) pourra donc prendre la forme

$$\int_{-(\nu-n_1)}^{n_2-\nu} dz\left(A + B\frac{z}{a} + \ldots\right) e^{\left(Fa + H\frac{z^2}{a} + I\frac{z^3}{a^2} + \ldots\right)i}, \tag{42}$$

où nous nous bornerons à supposer ν compris entre n_1 et n_2 de manière à faire rentrer $\nu - n_1$ et $n_2 - \nu$ dans le genre de grandeurs indéterminées défini plus haut. Si, dans cette intégrale, on change le signe de z pour $z < 0$, et qu'on pose ensuite $Hz^2 = ax$, les limites de x, H n'étant ni nul ni très petit, rentreront dans les grandeurs comprises sous la désignation commune ω, et, par le développement en série, l'intégrale prendra la forme,

$$\int_0^\omega \frac{dx}{2}\left(A\sqrt{\frac{a}{Hx}} + \frac{B}{H} + \ldots + \frac{AIxi}{H^2} + \ldots\right) e^{(Fa+x)i}$$

$$+ \int_0^\omega \frac{dx}{2}\left(A\sqrt{\frac{a}{Hx}} - \frac{B}{H} + \ldots - \frac{AIxi}{H^2} + \ldots\right) e^{(Fa+x)i}.$$

Comme on a $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, ces intégrales, en vertu de (39), deviendront finalement

$$A\sqrt{\frac{\alpha\pi}{H}}\,e^{\left(F\alpha+\frac{\pi}{4}\right)i}, \tag{43}$$

les termes du même ordre que $\alpha^{-\frac{1}{2}}$ et d'un ordre inférieur étant négligés. Ce résultat est également valable pour les valeurs négatives de H si l'on a soin de poser

$$\frac{1}{\sqrt{-1}} = -i = e^{-\frac{\pi}{2}i}.$$

Il cesse de l'être pour

$$H = 0.$$

Dans ce cas, nous pouvons, pour le généraliser davantage, supposer que $G - 2p\pi$ est une grandeur très petite; alors la sommation pourra aussi être remplacée par une intégration, et, au lieu de (42), on obtiendra l'intégrale suivante

$$\int_{-(\nu-n_1)}^{n_2-\nu} dz\left(A + B\frac{z}{\alpha} + C\frac{z^2}{\alpha^2} + \ldots\right)e^{\left(F\alpha + (G-2p\pi)z + I\frac{z^3}{\alpha^2} + K\frac{z^4}{\alpha^3} + L\frac{z^5}{\alpha^4} + \ldots\right)i}. \tag{45}$$

Changeons-y également le signe de z pour $z < 0$, et posons ensuite $\pm Iz^3 = \alpha^2 x^*$, le double signe étant déterminé de manière que $\pm I$ soit positif. En introduisant, pour abréger, les notations

* NOTE

$$G - 2p\pi = -\varepsilon\sqrt[3]{\frac{I}{\alpha^2}}, \tag{46}$$

$$Q = \int_0^\omega x^{-\frac{2}{3}}\cos(-\varepsilon x^{\frac{1}{3}} + x)\,dx \tag{47}$$

et

$$A = A_1 I,\ B = B_1 I,\ C = C_1 I,\ K = K_1 I \text{ et } L = L_1 I, \tag{48}$$

on pourra sans difficulté donner à l'intégrale (45) la forme

$$\pm\tfrac{2}{3}\,e^{Fai}\Big[(aI)^{\frac{2}{3}}A_1Q+(aI)^{\frac{1}{3}}i\Big(B_1\frac{dQ}{d\varepsilon}+A_1K_1\frac{d^4Q}{d\varepsilon^4}\Big)$$
$$-C_1\frac{d^2Q}{d\varepsilon^2}-(A_1L_1+B_1K_1)\frac{d^5Q}{d\varepsilon^5}-\tfrac{1}{2}A_1K_1^2\frac{d^8Q}{d\varepsilon^8}\Big], \qquad (49)$$

les termes de l'ordre de $a^{-\frac{1}{3}}$ et au-dessous étant négligés.

Dans le cas où $\varepsilon = 0$, on obtient à l'aide de (39)

* NOTE 18. $$\Gamma\Big(\frac{1}{3}\Big)\cos\frac{\pi}{6}=Q=-3\frac{d^3Q}{d\varepsilon^3},\quad \Gamma\Big(\frac{2}{3}\Big)\cos\frac{\pi}{6}=\frac{dQ}{d\varepsilon}=-\frac{3}{2}\frac{d^4Q}{d\varepsilon^4}*,$$
$$0=\frac{d^2Q}{d\varepsilon^2}=\frac{d^5Q}{d\varepsilon^5}=\frac{d^8Q}{d\varepsilon^8},$$

où

$$\Gamma(\tfrac{1}{3}) = 2{,}67894\ldots, \qquad \Gamma(\tfrac{2}{3}) = 1{,}35412\ldots,$$

ou avec les logarithmes vulgaires

$$\log\Gamma(\tfrac{1}{3}) = 0{,}4279627\ldots, \qquad \log\Gamma(\tfrac{2}{3}) = 0{,}1316565\ldots.$$

L'expression (49) prend alors la forme

$$\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\,e^{Fai}\big[(aI)^{\frac{2}{3}}A_1\Gamma(\tfrac{1}{3})+(aI)^{\frac{1}{3}}i\,(B_1-\tfrac{2}{3}A_1K_1)\,\Gamma(\tfrac{2}{3})\big]. \qquad (50)$$

L'intégrale Q (47) a, sous une forme un peu différente, été calculée numériquement par M. Airy*, qui pour l'intégrale

$$\int_0^\infty d\omega\cos\frac{\pi}{2}(\omega^3-\mu\omega) = W$$

a donné le tableau suivant:

μ	W	μ	W
−5	0,00041	0	0,66527
−4	0,00298	1	1,00041
−3	0,01730	2	0,56490
−2	0,07908	3	−0,56322
−1	0,27283	4	−0,47446
		5	0,68182

* On the intensity of Light in the neigbourhood of a Caustic. Trans. of the Cambr. phil. Soc., t. VI, p. 379; t. VIII, p. 595.

A l'aide de ce tableau, on peut aussi calculer Q, car on a

$$\varepsilon = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\mu, \quad Q = 3\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}}W.$$

En partant de $\mu = 0$, du côté négatif, W va toujours en décroissant jusqu'à 0; du côté positif, W va d'abord en croissant, atteint un maximum pour $\mu = 1{,}08$ et, par un mouvement périodique autour de zéro, se rapproche ensuite de cette dernière valeur. Le premier et le plus grand maximum de W est 1,504 fois plus grand que la valeur de W pour $m = 0$.

M. Stokes* a étendu le calcul de M. Airy jusqu'aux 50 premières racines de l'équation $W = 0$ et jusqu'aux 10 premières de $\frac{dW}{d\mu} = 0$. C'est ainsi qu'à $W = 0$ correspond la série

$$\mu = 2{,}4955;\quad 4{,}3631;\quad 5{,}8922;\quad 7{,}2436;\quad 8{,}4788\ \ldots$$

dans laquelle la racine d'ordre q, pour des valeurs croissantes de q, converge vers $3(q-\frac{1}{4})^{\frac{2}{3}}$. On a également pour $\frac{dW}{d\mu} = 0$ la série

$$\mu = 1{,}0845;\quad 3{,}4669;\quad 5{,}1446;\quad 6{,}5782;\quad 7{,}8685\ \ldots$$

où la racine d'ordre q converge vers $3(q-\frac{3}{4})^{\frac{2}{3}}$.

Les différents coefficients différentiels de Q par rapport à ε qui entrent dans l'expression (49) pourront tous être facilement exprimés par Q et $\frac{dQ}{d\varepsilon}$, car on a

$$\frac{d^2Q}{d\varepsilon^2} = -\frac{\varepsilon}{3}Q,^*$$ * NOTE 19.

d'où peuvent se déduire les coefficients différentiels supérieurs, par exemple

$$\frac{d^4Q}{d\varepsilon^4} = \frac{\varepsilon^2}{9}Q - \frac{2}{3}\frac{dQ}{d\varepsilon},\ \text{etc.}$$

* Trans. of the Cambr. phil. Soc., t. IX, p. 166.

Les maxima et minima de $\frac{dQ}{d\varepsilon}$ correspondent par conséquent à $Q = 0$, d'où il suit que le premier maximum a lieu pour $\mu = 2{,}4955 \ldots$ Le module (ou l'amplitude) de l'expression (49) varie avec les valeurs croissantes de ε d'une manière analogue à l'intégrale W, si l'on peut se contenter de prendre en considération le premier terme, qui est de l'ordre le plus élevé; mais si les termes suivants ne sont pas négligeables, le module renfermera aussi bien Q que $\frac{dQ}{d\varepsilon}$, d'où il résulte que les maxima seront déplacés et que le module ne pourra, en général, devenir nul dans ses variations périodiques. La périodicité deviendra ainsi moins apparente.

En comparant entre elles les deux expressions (43) et (49) de l'intégrale (42), on voit que la première est du même ordre que $a^{\frac{1}{2}}$ et la seconde du même ordre que $a^{\frac{2}{3}}$. On peut se rendre compte de la manière dont se fait le passage de l'une à l'autre en se représentant que H décroît jusqu'à devenir une grandeur très petite, en même temps que $G - 2p\pi$ continue à être nul. Il sera alors loisible de poser, dans l'intégrale (42), $z = z' + \delta$ et de déterminer δ de façon que le coefficient de z'^2 dans l'exposant devienne nul. Nous arrivons ainsi à la forme (45) où $G - 2p\pi$ devient égal à $-\frac{H^2}{3I}$, et par conséquent

$$3\varepsilon = H^2 \sqrt[3]{\frac{a^2}{I^4}}.$$

On voit par là que, dans ce passage de l'intégrale (42) à l'intégrale (45), ε restera nécessairement *positif*. Le passage de (43) à (49) se fait donc par cette variation périodique décrite plus haut, les valeurs de μ ou de ε variant en décroissant positivement, variation dans laquelle le dernier et le plus grand maximum est atteint avant

que ε devienne nul, tandis qu'à partir de là le module décroît rapidement jusqu'à 0, en même temps que ε, en passant par 0, prend des valeurs négatives de plus en plus grandes.

Nous rencontrerons enfin dans le chapitre suivant des sommes qui se laissent transformer en une intégrale de la forme

$$\int_0^{z_1} dz \left(A\frac{z}{a} + B\frac{z^3}{a^3} + \ldots\right) e^{\left(Fa + G\frac{z^2}{a} + H\frac{z^4}{a^3} + I\frac{z^6}{a^5} + \ldots\right)i}. \quad (51)$$

Si l'on y pose $Gz^2 = ax$ et que G ne soit ni nul ni très petit, la limite supérieure de x rentrera dans les grandeurs que nous avons désignées plus haut par ω*, et en négligeant les termes d'un ordre inférieur à l'unité, le résultat de l'intégration sera * NOTE 20.

$$\frac{A}{2G} e^{\left(Fa + \frac{\pi}{2}\right)i}. \quad (52)$$

Mais si G est très petit, on pose $Hz^4 = a^3x^2$, la limite supérieure de x étant désignée comme auparavant par ω*, et on pose pour abréger * NOTE 21.

$$G = \pm\varepsilon\sqrt{\frac{H}{a}}, \quad (53)$$

le signe supérieur correspondant à G positif et le signe inférieur à G négatif. L'intégrale devient par suite

$$\frac{1}{2H}\int_0^{\omega} dx \left((aH)^{\frac{1}{2}}A + Bx + \frac{AIi}{H}x^3\right) e^{(Fa \pm \varepsilon x + x^2)i}. \quad (54)$$

Pour $\varepsilon = 0$, l'intégration donne

$$\frac{A}{4}\sqrt{\frac{a\pi}{H}}\, e^{\left(Fa + \frac{\pi}{4}\right)i} + \frac{1}{4H^2}(BH - AI)\, e^{\left(Fa + \frac{\pi}{2}\right)i}, \quad (55)$$

tandis que l'intégrale générale (54) peut s'exprimer par

$$\frac{e^{Fai}}{2H}\left((aH)^{\frac{1}{2}}AQ \mp iB\frac{dQ}{d\varepsilon} \mp \frac{AI}{H}\frac{d^3Q}{d\varepsilon^3}\right), \tag{56}$$

en posant

$$Q = \int_0^\omega dx\, e^{(\pm\varepsilon x + x^2)i}. \tag{57}$$

De cette dernière intégrale on tire par différentiation relativement à ε et par intégration par parties

$$\frac{dQ}{d\varepsilon} = \mp\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon i}{2}Q, \tag{58}$$

d'où résulte encore

$$\frac{d^3Q}{d\varepsilon^3} = \pm\left(\frac{i}{2}+\frac{\varepsilon^2}{8}\right) + \left(-\frac{3\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon^3 i}{8}\right)Q. \tag{59}$$

En substituant ces valeurs dans (56), cette expression de l'intégrale cherchée sera déterminée par des grandeurs connues et par l'intégrale Q.

Cette dernière intégrale a souvent été employée sous différentes formes, notamment pour le calcul des phénomènes de diffraction, par exemple par Fresnel, Cauchy, Knochenhauer, Quet, etc. M. Ph. Gilbert* a calculé une table étendue pour les deux fonctions N et M, déterminées par

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\omega dx\, e^{(\varepsilon x + x^2)i} = N + Mi, \quad \varepsilon = \sqrt{2\pi}\mu,$$

et comprenant toutes les valeurs depuis $\mu^2 = 0{,}00$ jusqu'à $\mu^2 = 30{,}00$.

Par conséquent, lorsqu'on prend le signe supérieur dans l'intégrale Q, elle peut être calculée directement par cette table. Si l'on prend le signe inférieur et qu'on pose

* Recherches anal. sur la diffraction de la lumière. Mém. cour. de l'Acad. de Bruxelles, t XXXI, p. 1. 1862—63.

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\omega dx\, e^{(-\varepsilon x+x^2)i} = N_1+M_1 i,$$

ura

$$(N_1+N) + (M+M_1)i = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-\omega}^{\omega} dx\, e^{(\varepsilon x+x^2)i} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi-\varepsilon^2}{4}+i\sin\frac{\pi-\varepsilon^2}{4}\right),$$

ession qui permet de déterminer N_1 et M_1 par

$$N_1 = \sqrt{2}\cos\frac{\pi-\varepsilon^2}{4} - N,\quad M_1 = \sqrt{2}\sin\frac{\pi-\varepsilon^2}{4} - M.$$

Les deux grandeurs N et M décroissent rapidement et manière continue pour des valeurs croissantes de ε, il suit que N_1 et M_1 sonnt des foctions périodiques. me, d'après (58), on a signe avec le inférieur

$$\frac{dN_1}{d\varepsilon} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{\varepsilon}{2}M_1,\quad \frac{dM_1}{d\varepsilon} = -\frac{\varepsilon}{2}N_1,$$

résulte que

$$N_1\frac{dN_1}{d\varepsilon} + M_1\frac{dM_1}{d\varepsilon} = \frac{N_1}{\sqrt{2\pi}}.$$

On voit par là que le maximum et le minimum de $N_1^2+M_1^2$ correspondent à $N_1 = 0$, qui lui-même, pour de des valeurs de ε, correspondra approximativement à $\cos\frac{\pi-\varepsilon^2}{4} = 0$, et par conséquent à $\varepsilon^2 = (4p-1)\pi$ ou à $\mu = \sqrt{\frac{4p-1}{2}}$, p étant un nombre entier.

D'après M. Gilbert, on a

$N_1^2+M_1^2 = 2{,}7407$, $\mu = 1{,}2172$, $\left(\sqrt{\frac{3}{2}} = 1{,}2247\right)$, 1er max.,

$1{,}5562$, $\mu = 1{,}8725$, $\left(\sqrt{\frac{7}{2}} = 1{,}8708\right)$, 1er min.,

$2{,}3985$, $\mu = 2{,}3445$, $\left(\sqrt{\frac{11}{2}} = 2{,}3452\right)$, 2e max.,

$1{,}6864$, $\mu = 2{,}7390$, $\left(\sqrt{\frac{15}{2}} = 2{,}7386\right)$, 2e min.

A $\mu = 0$ correspond $N_1^2 + M_1^2 = \frac{1}{2}$, et à $\mu = \infty$, $N_1^2 + M_1^2 = 2$.

Si, dans (56), nous ne tenons compte que du terme de l'ordre le plus élevé ($a^{\frac{1}{2}}$), il résulte de ce qui précède que le module de cette expression croîtra de 0, pour $G = +\infty$, jusqu'à $\frac{A}{4}\sqrt{\frac{a\pi}{H}}$, pour $G = 0$, qu'il continuera à croître pour des valeurs décroissantes de G

* NOTE 22. jusqu'à $2{,}3412\,\frac{A}{4}\sqrt{\frac{a\pi}{H}}$, pour $G = -1{,}2172\sqrt{\frac{2\pi H}{a}}$ *, et que, par des variations périodiques décroissantes, il atteindra enfin le double de la valeur correspondant à $G = 0$.

4. Cas de a très grand. Mouvement sur l'axe principal.

De même que dans le chapitre précédent, a est considéré ici comme un nombre très grand, et nous chercherons à déterminer le mouvement de la lumière en négligeant seulement les grandeurs d'un ordre inférieur à l'unité.

Nous essaierons d'abord de déterminer ce mouvement *dans le voisinage du centre de la sphère*, en regardant a' qui est la distance du point considéré au centre, mesurée avec $\frac{\lambda'}{2\pi}$ comme unité de longueur, comme un nombre *très petit* par rapport à a et à a'. Sous cette condition, $v_n(a')$, déterminé par la série (22), deviendra très petit si n se rapproche de a, et c'est pourquoi les termes de la série (31), en ce qui concerne K' et S', n'acquièrent de l'importance que pour les valeurs inférieures de n. Dans les expressions que les équations (34) donnent pour k'_n et s'_n, on pourra donc aussi, d'après (23) et (25), poser

$$v_n(a) = \sin\left(a - \frac{n\pi}{2}\right), \quad v_n(a') = \sin\left(a' - \frac{n\pi}{2}\right),$$
$$w_n(a) = \cos\left(a - \frac{n\pi}{2}\right).$$

On obtient ainsi

$$\left.\begin{aligned} s'_{2n+1} &= k'_{2n} = k'_0 = e^{\alpha i}\frac{N}{\cos\alpha' + iN\sin\alpha'}, \\ s'_{2n} &= k'_{2n+1} = s'_0 = e^{\alpha i}\frac{N}{N\cos\alpha' + i\sin\alpha'}. \end{aligned}\right\} \quad (60)$$

Les séries (31) deviennent alors

$$K' = -i\frac{\cos\psi}{2\alpha'}\frac{d}{d\varphi}\sum_1^\infty \frac{2n+1}{n(n+1)} e^{\left(kt-\frac{n\pi}{2}\right)i}[(P_n(\cos\varphi)+P_n(-\cos\varphi))k'_0 + (P_n(\cos\varphi)-P_n(-\cos\varphi))s'_0]v_n(\alpha'$$

$$S' = -\frac{\sin\psi}{2\alpha'}\frac{d}{d\varphi}\sum_1^\infty \frac{2n+1}{n(n+1)} e^{\left(kt-\frac{n\pi}{2}\right)i}[(P_n(\cos\varphi)+P_n(-\cos\varphi))s'_0 + (P_n(\cos\varphi)-P_n(-\cos\varphi))k'_0]v_n(\alpha'$$

On peut sommer ces séries à l'aide des équations (26)* *NOTE 2 et (27), ce qui donne

$$K' = -i\frac{\cos\psi}{\alpha'\sin\varphi}e^{kti}[(-\sin\alpha'\cos\varphi+\sin(\alpha'\cos\varphi))k'_0 + i(-\cos\alpha'+\cos(\alpha'\cos\varphi))s'_0$$

$$S' = -\frac{\sin\psi}{\alpha'\sin\varphi}e^{kti}[(-\sin\alpha'\cos\varphi+\sin(\alpha'\cos\varphi))s'_0 + i(-\cos\alpha'+\cos(\alpha'\cos\varphi))k'_0$$

En substituant ces valeurs dans les équations (18) et en posant pour abréger

$$e^{kti}(-i\sin(\alpha'\cos\varphi)k'_0 + \cos(\alpha'\cos\varphi)s'_0) = Q,$$

il vient

$$\overline{\xi'} = \sin\varphi\cos\psi Q, \quad \overline{\eta'} = \cos\varphi\cos\psi Q, \quad \overline{\zeta'} = -\sin\psi Q.$$

On en déduits les composantes par rapport aux axes fixes

$$\xi' = 0, \quad \eta' = Q, \quad \zeta' = 0.$$

En remplaçant Q par sa valeur, on obtient par une petite transformation

$$\eta' = e^{(kt-\alpha'\cos\varphi)i}\frac{k'_0+s'_0}{2} - e^{(kt+\alpha'\cos\varphi)i}\frac{k'_0-s'_0}{2}. \quad (61)$$

Le sens physique de ce résultat ressort plus distinct si on développe en série les valeurs (60) de k'_0 et de s'_0, après avoir exprimé $\cos\alpha'$ et $\sin\alpha'$ sous une forme exponentielle, ce qui donne

$$k'_0 = \frac{2N}{N+1}\sum_0^\infty\left(\frac{N-1}{N+1}\right)^m e^{(\alpha-(2m+1)\alpha')i}, \quad s'_0 = \frac{2N}{N+1}\sum_0^\infty\left(\frac{1-N}{1+N}\right)^m e^{(\alpha-(2\ldots}$$

où m passe par la série des nombres entiers depuis 0 jusqu'à ∞. On obtient ainsi

$$\eta' = \frac{2N}{N+1}\sum_0^\infty\left(\frac{N-1}{N+1}\right)^{2m} e^{(kt-a'\cos\varphi+\alpha-(4m+1)\alpha')i}$$
$$-\frac{2N}{N+1}\sum_0^\infty\left(\frac{N-1}{N+1}\right)^{2m+1} e^{(kt+a'\cos\varphi+\alpha-(4m+3)\alpha')i}. \quad (62)$$

Le mouvement de la lumière dans le voisinage du centre est ainsi représenté par une somme de vibrations qui sont parallèles à celles des rayons incidents, et appartiennent à deux groupes de rayons dont l'un, ayant la même direction que les rayons incidents, est réfléchi un nombre pair de fois ou pas du tout par la surface interne de la sphère, pendant que l'autre se dirige en sens contraire après un nombre impair de réflexions. A l'entrée des rayons dans la sphère, l'amplitude est changée dans le rapport de $1+N$ à $2N$ et, après chaque réflexion, dans celui de $1+N$ à $1-N$, tandis que la phase correspond au chemin optique parcouru, résultats qui s'accordent avec ceux auxquels on arrive par la méthode élémentaire, lorsque les deux surfaces réfringentes sont considérées comme planes et perpendiculaires aux rayons incidents.

Si le point considéré *n'est pas très près du centre*, il faut avoir égard, dans les séries, aux termes qui

correspondent à de très grandes valeurs de n. C'est pourquoi il sera d'abord nécessaire de chercher des développements convenables pour les fonctions v_n et w_n.

On a identiquement

$$v_n = \sqrt{v_n^2+w_n^2}\sin\operatorname{arc\,tg}\frac{v_n}{w_n},\quad w_n = \sqrt{v_n^2+w_n^2}\cos\operatorname{arc\,tg}\frac{v_n}{w_n},$$

ou en posant

$$v_n^2+w_n^2 = q_n,\quad \operatorname{arc\,tg}\frac{v_n}{w_n} = \lambda_n,$$

$$v_n = \sqrt{q_n}\sin\lambda_n,\quad w_n = \sqrt{q_n}\cos\lambda_n. \tag{63}$$

A l'aide de l'équation

$$w_n v_n' - w_n' v_n = 1,$$

on obtient en outre, en désignant la variable par a,

$$\frac{d\lambda_n}{da} = \frac{1}{q_n}, \tag{64}$$

d'où l'on tire par intégration, $\lambda_n = a - \frac{n\pi}{2}$ correspondant à $a = \infty$,

$$\lambda_n = a - \frac{n\pi}{2} - \int_a^\infty da\left(\frac{1}{q_n} - 1\right). \tag{65}$$

Les séries fournies par (23) et (25) pour v_n et w_n donnent

$$q_n = 1 + \frac{n(n+1)}{a^2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{a^4}\cdot\frac{1\cdot3}{2\cdot4} + \dots \quad (66)^*$$ * NOTE 24.

Si a est un nombre très grand de l'ordre de α, et que toutes les grandeurs de l'ordre de α^{-1} ou d'un ordre inférieur puissent être négligées par rapport à celles du même ordre que l'unité, on pourra, par la sommation de la série (66), obtenir l'expression suivante de q_n pour toutes les valeurs de n jusqu'à une certaine limite inférieure à α, et où la

différence $a-(n+\frac{1}{2})$ peut encore être rapportée à l'ordre de α,

* NOTE 25.

$$q_n = \frac{a}{\sqrt{a^2-(n+\frac{1}{2})^2}}, \quad a > n+\tfrac{1}{2}.* \qquad (67)$$

En substituant cette expression de q_n dans (65), où elle doit rester valable pour tous les éléments de l'intégrale, on trouve par l'intégration

$$\lambda_n = \sqrt{a^2-(n+\tfrac{1}{2})^2} - \frac{n\pi}{2} + (n+\tfrac{1}{2}) \arcsin \frac{n+\frac{1}{2}}{a}. \qquad (68)$$

A q_n et à λ_n sera ajoutée plus loin la variable, qui, pour abréger, a été omise ici.

Tant que l'équation (67) est applicable, les coefficients différentiels de $q_n(\alpha)$ et de $q_n(\alpha')$ par rapport à α et à α' peuvent être négligés par rapport aux grandeurs de

* NOTE 26. l'ordre de α°*, comme $q_n(\alpha)$ et $q_n(\alpha')$. Si nous revenons maintenant aux équations différentielles (33) et (34) et si nous introduisons pour abréger les notations

$$\frac{Nq_n(\alpha')-q_n(\alpha)}{Nq_n(\alpha')+q_n(\alpha)} = b_n, \quad \frac{2Nq_n(\alpha)\,q_n(\alpha')\,(Nq_n(\alpha')-q_n(\alpha))^m}{(Nq_n(\alpha')+q_n(\alpha))^{m+2}} = b_n,$$

$$\frac{q_n(\alpha')-Nq_n(\alpha)}{q_n(\alpha')+Nq_n(\alpha)} = c_n, \quad \frac{2Nq_n(\alpha)\,q_n(\alpha')\,(q_n(\alpha')-Nq_n(\alpha))^m}{(q_n(\alpha')+Nq_n(\alpha))^{m+2}} = c_n,$$

$$\frac{2N\sqrt{q_n(\alpha)\,q_n(\alpha')}\,(Nq_n(\alpha')-q_n(\alpha))^m}{(Nq_n(\alpha')+q_n(\alpha))^{m+1}} = \beta_{n,m},$$

$$\frac{2N\sqrt{q_n(\alpha)\,q_n(\alpha')}\,(q_n(\alpha')-Nq_n(\alpha))^m}{(q_n(\alpha')+Nq_n(\alpha))^{m+1}} = \gamma_{n,m},$$

on pourra exprimer les coefficients par des fractions qui se laissent développer dans les séries convergentes

* NOTE 27. suivantes*:

$$\left.\begin{aligned}
2k_n &= -1 - b_n e^{2\lambda_n(\alpha)i} + \sum_{m=0}^{m=\infty} 2 b_{n,m} e^{2(\lambda_n(\alpha) - (m+1)\lambda_n(\alpha'))i}, \\
2s_n &= -1 - c_n e^{2\lambda_n(\alpha)i} + \sum_{m=0}^{m=\infty} 2 c_{n,m} e^{2(\lambda_n(\alpha) - (m+1)\lambda_n(\alpha'))i}, \\
k'_n &= \sum_{m=0}^{m=\infty} \beta_{n,m} e^{(\lambda_n(\alpha) - (2m+1)\lambda_n(\alpha'))i}, \\
s'_n &= \sum_{m=0}^{m=\infty} \gamma_{n,m} e^{(\lambda_n(\alpha) - (2m+1)\lambda_n(\alpha'))i}.
\end{aligned}\right\} \quad (69)$$

Passant ensuite à la sommation des séries (31), nous nous bornerons, dans ce chapitre, au cas où le point considéré *est situé sur l'axe des x (l'axe principal)*. Il est à remarquer que, pour $\cos\varphi = 1$, on a

$$\frac{dP_n(\cos\varphi)}{\sin\varphi\, d\varphi} = \frac{d^2P_n(\cos\varphi)}{d\varphi^2} = -\frac{n(n+1)}{2},$$

et pour $\cos\varphi = -1$

$$\frac{dP_n(\cos\varphi)}{\sin\varphi\, d\varphi} = -\frac{d^2P_n(\cos\varphi)}{d\varphi^2} = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}.$$

Si maintenant on introduit dans (17) les développements de K et de S et dans (18) ceux de K' et de S', et qu'on détermine ensuite les composantes par rapport aux axes fixes à l'aide des équations

$$\begin{aligned}
\xi &= \cos\varphi\,\bar{\xi} - \sin\varphi\,\bar{\eta}, \\
\eta &= \sin\varphi\cos\psi\,\bar{\xi} + \cos\varphi\cos\psi\,\bar{\eta} - \sin\psi\,\bar{\zeta}, \\
\zeta &= \sin\varphi\sin\psi\,\bar{\xi} + \cos\varphi\sin\psi\,\bar{\eta} + \cos\psi\,\bar{\zeta},
\end{aligned}$$

et des équations correspondantes pour un point intérieur, on trouvera que les vibrations, sur l'axe principal, vont partout dans la direction de l'axe des y, ce qui est aussi une conséquence directe de la symétrie du mouvement de la lumière par rapport au plan des xy, et que

les vibrations à l'extérieur et à l'intérieur de la sphère seront déterminées par

$$\eta = e^{(kt\mp a)i} + \sum_{1}^{\infty} \frac{n+\frac{1}{2}}{a} e^{\left(kt\mp\frac{n\pi}{2}\right)i} (\pm ik_n(v'_n(a)+w'_n(a)i)+s_n(v_n(a)+w_n(a)i)),$$

$$\eta' = \sum_{1}^{\infty} \frac{n+\frac{1}{2}}{a'} e^{\left(kt\mp\frac{n\pi}{2}\right)i} (\pm ik'_n v'_n(a') + s'_n v_n(a')),$$

le signe supérieur se rapportant au côté positif de l'axe des x, et le signe inférieur au côté négatif.

Les fonctions de n qui entrent dans ces expressions peuvent être développées suivant les puissances de $n+\frac{1}{2}$ en séries qui restent convergentes jusqu'à une certaine limite $n=n_1$, jusqu'à laquelle nous effectuerons d'abord les sommations indiquées. C'est ainsi que l'expression de $\lambda_n(a)$ dans (68) peut être développée dans la série suivante

$$\lambda_n(a) = a - \frac{n\pi}{2} + \frac{(n+\frac{1}{2})^2}{a}\cdot\frac{1}{2} + \frac{(n+\frac{1}{2})^4}{3a^3}\cdot\frac{1}{2\cdot4} + \frac{(n+\frac{1}{2})^6}{5a^5}\cdot\frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot6} + \cdots$$

Pour q_n nous avons le développement en série (66) et, à l'aide des équations (63), on obtient

$$v_n(a) + w_n(a)i = i\sqrt{q_n(a)}\, e^{-\lambda_n(a)i},$$

et en négligeant $q'_n(a)$, en vertu de (64),

$$v'_n(a) + w'_n(a)i = \frac{1}{\sqrt{q_n(a)}} e^{-\lambda_n(a)i}.$$

Nous considérerons maintenant à part les différents termes dont se composent les équations (69) qui définissent les coefficients, et nous commencerons par poser

$$2k_n = -1, \quad 2s_n = -1.$$

La première équation (70) donnera alors

$$\eta = e^{(kt\mp a)i} - i\sum_{1}^{n_1}\frac{n+\frac{1}{2}}{2a}\left(\frac{\pm 1}{\sqrt{q_n(a)}}+\sqrt{q_n(a)}\right)e^{\left(kt\mp\frac{n\pi}{2}-\lambda_n(a)\right)i}.$$

En y remplaçant $\lambda_n(a)$ par la série (71), on voit que l'exposant renfermera le terme $\frac{n\pi}{2}(\mp 1+1)$. Si l'on prend le signe inférieur, ce terme se réduit à $n\pi$ et, d'après ce qui a été exposé dans le chapitre précédent, la somme devient nulle. Par conséquent, on aura pour le côté négatif de l'axe des x

$$\eta = e^{(kt+a)i}.$$

Mais si l'on prend le signe supérieur, la somme, en posant $n+\frac{1}{2} = z$, peut être changée en une intégrale de la forme (51), et on obtient par comparaison

$$A = \frac{\alpha}{a}, \quad F\alpha = kt - a, \quad G = -\frac{\alpha}{2a},$$

tandis que, d'après (52), l'intégrale devient égale à

$$-e^{\left(kt-a+\frac{\pi}{2}\right)i}.$$

On a donc pour le côté positif de l'axe des x

$$\eta = e^{(kt-a)i} + i\,e^{\left(kt-a+\frac{\pi}{2}\right)i} = 0.$$

La partie du mouvement qui est représentée ici n'est donc pas autre chose que le mouvement du rayon central incident jusqu'au point ou il rencontre la sphère.

Si l'on considère ensuite le deuxième terme des deux premières équations (69) et qu'on pose

$$2k_n = -b_n e^{2\lambda_n(a)i}, \quad 2s_n = -c_n e^{2\lambda_n(a)i},$$

la somme qui figure dans la première équation (70) renfermera l'exposant

$$\left(kt-a+2\alpha+\frac{n\pi}{2}(\mp 1-1)+\frac{(n+\frac{1}{2})^2}{2}\left(-\frac{1}{a}+\frac{2}{\alpha}\right)+\ldots\right)i.$$

Avec le signe supérieur, la somme doit ici devenir nulle, tandis qu'avec le signe inférieur, elle pourra comme auparavant être changée en une intégrale de la forme (51), et on obtiendra par comparaison

$$A=\frac{N-1}{N+1}\frac{a}{\alpha}i,\quad Fa=kt-a+2\alpha,\quad G=\frac{a}{2}\left(-\frac{1}{a}+\frac{2}{\alpha}\right).$$

D'après (52), l'intégrale sera donc égale à

$$-\frac{N-1}{N+1}\cdot\frac{1}{a\left(-\frac{1}{a}+\frac{2}{\alpha}\right)}e^{(kt-a+2\alpha)i}. \qquad (72)$$

Cette partie du mouvement correspond au rayon central réfléchi par la surface antérieure de la sphère, et le résultat est le même que celui qui peut être obtenu par la voie élémentaire, la phase étant déterminée par le chemin optique parcouru, et l'amplitude, après la réflexion, étant égale à $-\frac{N-1}{N+1}$ sur la surface même de la sphère, par conséquent à la distance $\frac{1}{2}\alpha$ (les distances mesurées avec $\frac{\lambda}{2\pi}$ comme unité de longueur) du foyer virtuel des rayons centraux, et devant ensuite décroître dans le même rapport que le point considéré s'éloigne de ce foyer.

Considère-t-on enfin dans les équations (69) le terme qui correspond à

$$k_n=b_{n,m}e^{2(\lambda_n(\alpha)-(m+1)\lambda_n(\alpha'))i},\quad \varkappa_n=c_{n,m}e^{2(\lambda_n(\alpha)-(m+1)\lambda_n(\alpha'))i},$$

le mouvement sera déterminé par

$$\sum_{1}^{n_1} \frac{n+\frac{1}{2}}{a\sqrt{q_n(a)}}\left(\pm b_{n,m} + c_{n,m}\, q_n(a)\right) e^{\left(kt+\frac{n\pi}{2} - \lambda_n(a) + 2\lambda_n(\alpha) - (2m+2)\lambda_n(\alpha')\right)i}.$$

Développé suivant les puissances de $n+\frac{1}{2}$, cet exposant deviendra

$$\left(kt - a + 2\alpha - (2m+2)\alpha' + \frac{n\pi}{2}(\mp 1 + 2m + 1) + \frac{(n+\frac{1}{2})^2}{2}\left(-\frac{1}{a} + \frac{2}{\alpha} - \frac{2m+2}{\alpha'}\right) + \ldots\right)i.$$

La somme sera nulle à moins qu'on n'ait

$$\mp 1 + 2m + 1 = 4p,$$

c'est-à-dire à moins que m ne soit un nombre pair quand le point est situé sur le côté positif de l'axe des x, et un nombre impair quand il est situé sur le côté négatif. Cela posé, la somme peut être changée en une intégrale de la forme (51) et on obtient par comparaison

$$*A = i\frac{\alpha}{a}\frac{4N(1-N)^m}{(1+N)^{m+2}}, \quad B = 0,$$ * NOTE 2

$$Fa = kt - a + 2\alpha - (2m+2)\alpha', \quad G = \frac{a}{2}\left(-\frac{1}{a} + \frac{2}{\alpha} - \frac{2m+2}{\alpha'}\right),$$

$$H = \frac{a^3}{24}\left(-\frac{1}{a^3} + \frac{2}{\alpha^3} - \frac{2m+2}{\alpha'^3}\right), \quad I = \frac{a^5}{80}\left(-\frac{1}{a^5} + \frac{2}{\alpha^5} - \frac{2m+2}{\alpha'^5}\right).$$

D'après (52), qui suppose que G n'est pas très petit, le résultat de l'intégration sera

$$-\frac{4N(1-N)^m}{(1+N)^{m+2}} \cdot \frac{1}{a\left(-\frac{1}{a} + \frac{2}{\alpha} - \frac{2m+2}{\alpha'}\right)} e^{(kt - a + 2\alpha - (2m+2)\alpha')i}.$$

Ce résultat peut également être obtenu par la voie élémentaire. Qu'on imagine un faisceau cylindrique de rayons centraux, de diamètre 1, pénétrant dans la sphère. Après m réflexions intérieures, ce faisceau sortira de la sphère avec le diamètre $\frac{(2m+2)a-a'}{a'}$, et se réunira ensuite en un foyer réel ou virtuel. Si ce foyer est à une distance a_1 du centre, le diamètre du faisceau à la distance a sera $\frac{a_1-a}{a_1-a}\cdot\frac{(2m+2)a-a'}{a'}$. Or la distance focale a_1 est déterminée par $-\frac{1}{a_1}+\frac{2}{a}-\frac{2m+2}{a'}=0$, et l'amplitude des vibrations, qui, après les m réflexions et deux réfractions, est devenue $\left(\frac{1-N}{1+N}\right)^m\frac{4N}{(1+N)^2}$, sera augmentée dans le même rapport que le diamètre du faisceau a diminué. Si de plus la phase est déterminée par le chemin optique parcouru, on voit que le résultat est exactement le même que celui qui a été trouvé plus haut.

Par contre, on ne peut procéder ainsi pour déterminer le mouvement aux foyers eux-mêmes. Ceux-ci sont déterminés par l'équation $G=0$, à laquelle se rattache la condition $2N>2m+2\geqq N$, correspondant à $0<\frac{1}{a}\leqq\frac{1}{\alpha}$, par où l'on voit qu'à $N\leqq 1$ ne correspond aucun foyer réel, à $1<N<2$ un seul foyer, etc. A $G=0$ correspond l'équation (55), qui, avec les valeurs trouvées plus haut de A, B, H et I, donne l'expression suivante pour le mouvement au foyer considéré

$$-\frac{2N(1-N)^m}{(1+N)^{m+2}}\left(\sqrt{\frac{6\pi}{a^2\left(-\frac{1}{a^3}+\frac{2}{a^3}-\frac{2m+2}{a'^3}\right)}}\,e^{\left(Fa-\frac{\pi}{4}\right)i}\right.$$
$$\left.-\frac{18}{5}\,\frac{-\frac{1}{a^5}+\frac{2}{a^5}-\frac{2m+2}{a'^5}}{a\left(-\frac{1}{a^3}+\frac{2}{a^3}-\frac{2m+2}{a'^3}\right)^2}\,e^{Fai}\right). \qquad (74)$$

Il résulte de l'expression de G que, si, d'un point extérieur, nous nous rapprochons de la sphère le long de l'axe principal et passons par un foyer, la valeur de G de positive deviendra négative en passant par 0. On voit par là que l'amplitude, conformément à ce qui a été exposé à la fin du chapitre précédent, croît rapidement pendant ce rapprochement, depuis une valeur très petite dans le voisinage du foyer jusqu'à la valeur de l'ordre de $a^{\frac{1}{4}}$ déterminée plus haut pour le foyer, et que, continuant encore à croître, elle atteint par des variations périodiques une valeur double de celle qu'elle avait au foyer. Au delà de ce point, l'axe est rencontré par d'autre rayons situés en dehors des rayons centraux et dont l'action sera déterminée plus loin. Une détermination plus précise du mouvement de la lumière dans le voisinage du foyer résulte de (56) et de l'aperçu donné ensuite de la valeur de l'intégrale Q (57).

Comme exemple, je supposerai $m = 0$, le rayon de la sphère $= 1^{c}$, l'indice de réfraction $= 1{,}5$, et la longueur d'onde de la lumière incidente $= 0^{mm}{,}0005$. On aura alors

$$a = 40000\,\pi, \quad a' = 1{,}5\,a, \quad \alpha = 1{,}5\,a, \quad N = 1{,}5.$$

Ces valeurs substituées dans (74) donnent pour résultat

$$-467{,}23\,e^{\left(\nu a - \frac{\pi}{4}\right)i} + 1{,}50\,e^{\nu a i}.$$

On voit ainsi que le deuxième terme n'a qu'une importance médiocre, et que l'intensité, qui est proportionnelle au carré de l'amplitude, est très considérable à ce foyer, à savoir 217311 fois plus grande que l'intensité de la lumière incidente. Pour une sphère

ayant le même indice de réfraction et un rayon double, l'intensité serait, à très peu près, deux fois plus grande.

A une petite distance δ (mesurée avec $\frac{\lambda}{2\pi}$ comme unité de longueur) du foyer, on aura $G = -\frac{a\delta}{2a^2}$, et si l'intensité a atteint en ce point son premier maximum, on tirera de la valeur de G donnée à la fin du chapitre précédent $\delta = 1047$, correspondant à $0^{\text{mm}},0833$. En ce point, l'intensité s'élèvera à 1191200, car elle est ici 5,4814 fois plus grande qu'au foyer.

Le calcul de la partie du mouvement de la lumière qui a lieu sur l'axe en dedans de la sphère, et qui procède des rayons centraux, peut se faire d'une manière analogue en partant de la seconde équation (70). La somme à calculer, en prenant isolément le terme général des sommes données dans (69) pour k'_n et s'_n, sera

$$\sum_1^{n_1} \frac{n+\frac{1}{2}}{a'\sqrt{q_n(a')}} \Big(\pm i \cos \lambda_n(a') \beta_{n,m} + q_n(a') \sin \lambda_n(a') \gamma_{n,m}\Big) e^{\left(kt \mp \frac{n\pi}{2} + \lambda_n(a) - (2m+1)\lambda_n(a')\right)i}.$$

Si, dans cette expression, on donne à $\cos \lambda_n(a')$ et à $\sin \lambda_n(a')$ la forme exponentielle, et qu'on développe ensuite toutes les fonctions λ_n suivant la formule (71), les coefficients de $\frac{n\pi}{2} i$ dans les exposants de e deviendront

$$\mp 1 + 2m + 1 \quad \text{et} \quad \mp 1 + 2m - 1.$$

C'est seulement lorsque ces coefficients sont nuls ou égaux à un multiple de 4 que la somme n'est pas nulle, et cela n'aura lieu que s'ils peuvent être rapportés à la forme*

* NOTE 29.

$$\mp(1 - (-1)^m) + 2m.$$

Dans ce cas, on pourra donner à la somme la forme

de l'intégrale (51) et, par comparaison avec celle-ci, obtenir

$$A = \pm i \frac{a}{a'} \frac{2N(N-1)^m}{(N+1)^{m+1}}, \quad B = 0,$$

$$F\alpha = kt \mp (-1)^m a' + a - (2m+1)a', \quad G = \frac{a}{2}\left(\mp \frac{(-1)^m}{a'} + \frac{1}{a} - \frac{2m+1}{a'}\right)$$

$$H = \frac{a^3}{24}\left(\mp \frac{(-1)^m}{a'^3} + \frac{1}{a^3} - \frac{2m+1}{a'^3}\right), \quad I = \frac{a^5}{80}\left(\mp \frac{(-1)^m}{a'^5} + \frac{1}{a^5} - \frac{2m+1}{a'^5}\right)$$

Si G n'est pas très petit, le résultat de l'intégration sera d'après (52)

$$\mp \frac{2N(N-1)^m}{(N+1)^{m+1}} \frac{1}{a'\left(\mp \frac{(-1)^m}{a'} + \frac{1}{a} - \frac{2m+1}{a'}\right)} e^{(kt \mp (-1)^m a' + a - (2m+1)a')i}.$$

Mais si $G = 0$, on aura d'après (55)

$$\mp \frac{N(N-1)^m}{(N+1)^{m+1}} \left(\sqrt{\frac{6\pi}{a'^3\left(\mp \frac{(-1)^m}{a'^3} + \frac{1}{a^3} - \frac{2m+1}{a'^3}\right)}}\, e^{\left(Fa - \frac{\pi}{4}\right)i} - \frac{18}{5} \frac{\mp \frac{(-1)^m}{a'^5} + \frac{1}{a^5} - \frac{2m+1}{a'^5}}{a'\left(\mp \frac{(-1)^m}{a'^3} + \frac{1}{a^3} - \frac{2m+1}{a'^3}\right)^2} e^{Fai} \right). \quad (76)$$

Comme on doit avoir $a' < a$, on voit que l'équation $G = 0$ n'est pas possible pour $N-1 < 2m+1 < N+1$, tandis que l'équation pourra être satisfaite par toutes les autres valeurs de m, en prenant l'un ou l'autre des deux signes qui entrent dans l'expression ci-dessus de G.

Si, dans (75), on regarde a' comme infiniment petit et qu'on remplace m par $2m$ et $2m+1$, le résultat correspondra à celui qui a été trouvé dans (62), où le mouvement dans le voisinage du centre a été déterminé par une autre voie.

Nous continuerons maintenant la sommation des séries (70) de $n = n_1$ à $n = n_2$, n_2 étant la limite supérieure de n qui satisfait à la condition de l'application des formules (67) et (68) aux fonctions q_n et λ_n. Les séries prendront ainsi la forme indiquée dans (35), et en posant également ici $n = \nu + z$, où ν et z sont considérés comme des nombres entiers, nous introduirons les notations suivantes

* NOTE 30. $$\nu + \tfrac{1}{2} = a \sin\theta = a' \sin\theta' = a \sin\vartheta = a' \sin\vartheta',* \quad (77)$$

où les quatre angles θ, θ', ϑ et ϑ' sont compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ et supposés n'être pas très voisins de ces deux limites.

Il résulte de (67) que

$$1 = \cos\theta\, q_\nu(a) = \cos\theta'\, q_\nu(a') = \cos\vartheta\, q_\nu(a) = \cos\vartheta'\, q_\nu(a'). \quad (78)$$

Les coefficients b_ν, $b_{\nu,m}$, etc., seront alors déterminés par

$$b_\nu = \frac{N\cos\theta - \cos\theta'}{N\cos\theta + \cos\theta'}, \quad b_{\nu,m} = 2N\cos\theta\cos\theta' \frac{(N\cos\theta - \cos\theta')^m}{(N\cos\theta + \cos\theta)^{m+2}}$$

$$c_\nu = \frac{\cos\theta - N\cos\theta'}{\cos\theta + N\cos\theta'}, \quad c_{\nu,m} = 2N\cos\theta\cos\theta' \frac{(\cos\theta - N\cos\theta')^m}{(\cos\theta + N\cos\theta')^{m+2}}$$

$$\beta_{\nu,m} = 2N\sqrt{\cos\theta\cos\theta'} \frac{(N\cos\theta - \cos\theta')^m}{(N\cos\theta + \cos\theta')^{m+1}},$$

$$\gamma_{\nu,m} = 2N\sqrt{\cos\theta\cos\theta'} \frac{(\cos\theta - N\cos\theta')^m}{(\cos\theta + N\cos\theta')^{m+1}}.$$

Les coefficients correspondants b_n, $b_{n,m}$, etc., pourront être développés en séries suivant les puissances de z, telles, par exemple, que

$$b_n = b_\nu + \left(\frac{1}{a\cos\theta}\frac{db_\nu}{d\theta} + \frac{1}{a'\cos\theta'}\frac{db_\nu}{d\theta'}\right)z + \dots$$

On a également d'après (68)

$$\lambda_\nu(\alpha) = \alpha\cos\theta - \frac{\nu\pi}{2} + (\nu+\tfrac{1}{2})\,\theta,$$

$$\lambda_n(\alpha) = \lambda_\nu(\alpha) + \left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)z + \frac{z^2}{2\alpha\cos\theta} + \frac{\sin\theta\, z^3}{6\alpha^2\cos^3\theta} + \frac{(1+2\sin^2\theta)\,z^4}{24\,\alpha^3\cos^5\theta} + \dots$$

et l'on obtient de la même manière les développements correspondants de $\lambda_n(\alpha')$, $\lambda_n(a)$, $\lambda_n(a')$.

De même qu'auparavant, nous considérerons maintenant à part les différents termes des développements (69) de k_n et de s_n, et nous commencerons par supposer que

$$2k_n = -1, \quad 2s_n = -1.$$

La somme η (70), prise de $n = n_1$ à $n = n_2$, renfermera dans cette hypothèse l'exposant

$$\left(kt \mp \frac{n\pi}{2} - \lambda_n(a)\right)i = \left(kt \mp \frac{\nu\pi}{2} - \lambda_\nu(a) + \left(\mp\frac{\pi}{2} - \vartheta + \frac{\pi}{2}\right)z + \dots\right)i.$$

Le coefficient de z ne pouvant être ici ni nul ni très petit, la somme, dans ce cas, sera donc nulle.

Si l'on suppose ensuite que

$$2k_n = -b_n e^{2\lambda_n(\alpha)i}, \quad 2s_n = -c_n e^{2\lambda_n(\alpha)i},$$

la somme renfermera l'exposant

$$\left(kt \mp \frac{n\pi}{2} - \lambda_n(a) + 2\lambda_n(\alpha)\right)i,$$

où le coefficient de zi deviendra $\mp\frac{\pi}{2} - \left(\vartheta - \frac{\pi}{2}\right) + 2\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$, et ne pourra non plus être nul ni très petit, $2\theta - \vartheta$ devant être plus petit que π et en même temps plus grand que 0, parce qu'on doit avoir $\theta \geqq \vartheta$. La somme sera donc aussi nulle dans ce cas.

Si l'on pose enfin

$$k_n = b_{n,m}\, e^{2(\lambda_n(\alpha) - (m+1)\lambda_n(\alpha'))i}, \quad s_n = c_{n,m}\, e^{2(\lambda_n(\alpha) - (m+1)\lambda_n(\alpha'))i},$$

la somme renfermera l'exposant

$$\left(kt \mp \frac{n\pi}{2} - \lambda_n(a) + 2\lambda_n(a) - (2m+2)\lambda_n(a')\right)i$$

où le coefficient de zi deviendra

$$\frac{\pi}{2}(2m+1\mp 1) - \vartheta + 2\theta - (2m+2)\theta' = G.$$

Si maintenant on suppose, comme dans (41), que $G = 2p\pi$, la somme sera changée en une intégrale de la forme (42), dont les coefficients seront

$$A = i\,\frac{\sin\vartheta}{\sqrt{\cos\vartheta}}(\pm\cos\vartheta\, b_{\nu,m} + c_{\nu,m}), \quad B = \alpha\frac{\partial A}{\partial \nu},$$

$$= kt + (\nu+\tfrac{1}{2})G - \frac{\pi}{4}(2m+1\mp 1) - a\cos\vartheta + 2a\cos\theta + (2m+2)a'\cos\theta',$$

$$= \frac{a}{2}\left(-\frac{1}{a\cos\vartheta} + \frac{2}{a\cos\theta} - \frac{2m+2}{a'\cos\theta'}\right) = \frac{1}{2\sin\theta}(-\operatorname{tg}\vartheta + 2\operatorname{tg}\theta - (2m+2)\operatorname{tg}\theta'),$$

$$= \frac{1}{6\sin^2\theta}(-\operatorname{tg}^3\vartheta + 2\operatorname{tg}^3\theta - (2m+2)\operatorname{tg}^3\theta'),$$

$$\frac{I}{4\sin\theta} + \frac{1}{8\sin^3\theta}(-\operatorname{tg}^5\vartheta + 2\operatorname{tg}^5\theta - (2m+2)\operatorname{tg}^5\theta').$$

Comme ν est un nombre entier, on pourra aussi, dans $F\alpha$, remplacer le terme $(\nu+\frac{1}{2})G$ par $p\pi$, si la condition $G = 2p\pi$ est satisfaite.

Le résultat de l'intégration sera alors donné par la formule (43) et, si l'on a $H = 0$, par (50), ou plus généralement, si $G - 2p\pi$ n'est pas nul mais très petit, par (49).

Les résultats, en ce qui concerne un point intérieur, pourront aussi être déterminés par les mêmes formules en partant de la seconde équation (70), qui conduit pour les coefficients aux valeurs suivantes:

$$A = i\frac{\sin\vartheta'}{\sqrt{\cos\vartheta'}}(\pm\cos\vartheta'\beta_{\nu,m} - (\pm)\gamma_{\nu,m}), \quad B = a\frac{\partial A}{\partial\nu},$$

$$G = \frac{\pi}{2}(2m-(\pm)1\mp 1)+(\pm)\vartheta'+\theta-(2m+1)\theta',$$

$$kt+(\nu+\tfrac{1}{2})G-\frac{\pi}{4}(2m-(\pm 1)\mp 1)+(\pm)a'\cos\vartheta'+a\cos\theta-(2m+1)a'\cos\theta',$$

$$\frac{1}{2\sin\theta}((\pm)\operatorname{tg}\vartheta'+\operatorname{tg}\theta-(2m+1)\operatorname{tg}\theta'),$$

$$\frac{1}{6\sin^2\theta}((\pm)\operatorname{tg}^3\vartheta'+\operatorname{tg}^3\theta-(2m+1)\operatorname{tg}^3\theta'),$$

$$\frac{I}{4\sin\theta}+\frac{1}{8\sin^3\theta}((\pm)\operatorname{tg}^5\vartheta'+\operatorname{tg}^5\theta-(2m+1)\operatorname{tg}^5\theta').$$

Les signes entre parenthèses $(\pm)$ sont partout pris pareillement soit pour $+$ soit pour $-$ et sont déterminés d'une manière plus précise par la condition que $G-2p\pi$ doit être nul ou très petit.

Si nous nous représentons le mouvement ainsi calculé de la lumière sur l'axe principal, produit par la réfraction et la réflexion intérieure de rayons lumineux, ces rayons correspondront à tous ceux qui rencontrent la sphère à une distance $\nu+\frac{1}{2}$ de l'axe principal. L'angle d'incidence correspondra à θ, l'angle de réfraction à θ', tandis que ϑ et ϑ' seront les angles aigus sous lesquels les rayons rencontrent l'axe principal au point a hors de la sphère ou au point a' en dedans de celle-ci. Après m réflexions intérieures, un rayon incident aura dévié de l'angle

$$\Delta_m = m\pi+2\theta-(2m+2)\theta'$$

s'il est sorti de la sphère, et de l'angle

$$\Delta'_m = m\pi+\theta-(2m+1)\theta'$$

s'il n'en est pas sorti.

Pour un point extérieur, la condition $G = 2p\pi$ pourra donc aussi, d'après la valeur de G donnée plus haut, être exprimée par

$$\Delta_m = \vartheta + (2p - \tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2})\pi,$$

équation qui exprime que les rayons ont dévié de l'angle ϑ augmenté soit d'un nombre entier de circonférences, lorsqu'on prend le signe supérieur et que l'axe des x est coupé sur son côté positif, soit d'un nombre impair de demi-circonfirences, lorsqu'on prend le signe inférieur et que l'axe des x est coupé sur son côté négatif.

Pour un point intérieur, la condition $G = 2p\pi$ correspondra soit à

$$\Delta'_m = -\vartheta' + (2p + \tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2})\pi,$$

soit à

$$\Delta'_m = \vartheta' + (2p - \tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2})\pi.$$

Le dernier cas correspond au précédent, où l'intersection des rayons et de l'axe principal avait lieu hors de la sphère; le premier se présente lorsque les rayons coupent le côté positif ou le côté négatif de l'axe des x, suivant qu'ils ont dévié d'un nombre entier de circonférences augmenté de l'angle obtus $\pi - \vartheta'$, ou d'un nombre impair de demi-circonférences augmenté du même angle, ce qui ne peut avoir lieu pour les intersections hors de la sphère.

On voit par ce qui précède qu'en général tous les cas où un des rayons qui, en dehors des rayons centraux, sont tombés sur la sphère et ont subi m réflexions, peut couper l'axe en un point, sont compris dans la condition $G = 2p\pi$.

Si, pour un point, $G - 2p\pi$ n'est pas nul, mais est une quantité très petite, ce point n'est pas rencontré

directement par les rayons rectilignes réfractés, mais seulement par les rayons infléchis qui interfèrent.

Il a été dit plus haut que, si, d'un point extérieur, nous nous rapprochons de la sphère le long de l'axe principal, nous rencontrerons, peu après avoir dépassé un des foyers des rayons centraux, une amplitude deux fois plus grande que l'amplitude au foyer. En partant de là, on peut maintenant pousser plus loin la détermination du mouvement de la lumière à l'aide des résultats obtenus ci-dessus pour un point extérieur. En supposant ces angles très petits, nous aurons

$$-\vartheta+2\theta-(2m+2)\theta' = 0, \text{ et } 2m+1\mp 1 = \text{m}^{\text{e}} \text{ de } 4;$$

par conséquent m est pair ou impair suivant qu'on prend le signe supérieur ou le signe inférieur.

On trouve en outre

$$A = i\vartheta 4N\frac{(1-N)^m}{(1+N)^{m+2}}, \quad Fa = kt-a+2a-(2m+2)a',$$

et en développant en série

$$H = \frac{1}{6\theta}(-\vartheta^3+2\theta^3-(2m+2)\theta'^3).$$

Le résultat donné par (43) deviendra donc

$$\sqrt{\frac{a\pi}{H}}\, e^{\left(Fa+\frac{\pi}{4}\right)i} = i\vartheta 4N\frac{(1-N)^m}{(1+N)^{m+2}}\sqrt{\frac{6a\theta\pi}{-\vartheta^3+2\theta^3-(2m+2)\theta'^3}}\, e^{\left(Fa+\frac{\pi}{4}\right)i}.$$

Si maintenant on remarque que, les angles étant supposés très petits, on aura d'après (77) $a\theta = a'\theta' = a\vartheta$, il en résulte que l'expression ci-dessus sera précisément le double du résultat trouvé pour le mouvement au foyer, tel qu'il est déterminé par l'équation (74). Le second terme peu important de cette dernière for-

mule a ici été laissé de côté. On voit par là que les résultats obtenus conviennent également à des angles assez petits pour que les formules déduites plus haut pour les rayons centraux leur soient directement applicables. On peut en dire tout autant des points intérieurs.

Lorsque θ ou θ' se rapprochera de la limite supérieure $\frac{\pi}{2}$, H se rapprochera de $\pm\infty$ pour un point tant extérieur qu'intérieur, et le résultat déterminé par (43) convergera par conséquent vers 0. Lorsque, pour un point intérieur, ϑ' se rapprochera de $\frac{\pi}{2}$, A convergera vers $-(\pm) i \frac{\gamma_{\nu,m}}{2\sqrt{\cos\vartheta'}}$, H vers $(\pm)\frac{1}{2\sin\theta\cos\vartheta'}$ et Fa vers $C+(\pm)\frac{\pi}{4}$, la valeur de C étant

$$C = kt + p\pi - \frac{\pi}{4}(2m\mp 1) + a\cos\theta - (2m+1)a'\cos\theta'.$$

La formule (43) devient par suite

$$A\sqrt{\frac{a\pi}{H}}\, e^{\left(Fa+\frac{\pi}{4}\right)i} = -(\pm) i \frac{\gamma_{\nu,m}}{2\sqrt{\cos\vartheta'}} \sqrt{\frac{a\pi\cdot 2\sin\theta\cos\vartheta'}{(\pm)1}}\, e^{\left(C+\frac{\pi}{4}(1+(\pm)\right.}$$

expression qui, soit qu'on prenne le signe supérieur ou le signe inférieur, est égale à

$$\tfrac{1}{2}\gamma_{\nu,m}\sqrt{2\pi a\sin\theta}\, e^{Ci}.$$

Si maintenant a' est supposé être un point pour lequel ϑ' devient exactement égal à $\frac{\pi}{2}$, et que l'un des deux signes $(\pm)$ corresponde à un point très voisin $a'+h$, le signe contraire correspondra à un autre point $a'-h$. Mais on voit par ce qui précède que le résultat du calcul sera le même pour ces deux points très voisins et qu'il est indépendant de leur distance au point

a', d'où l'on peut conclure que les formules trouvées sont encore applicables dans le cas où ϑ' atteint la limite $\frac{\pi}{2}$.

Les résultats exposés dans ce chapitre comprennent ainsi tous les cas où les rayons lumineux, après avoir été réfléchis et réfractés un nombre quelconque de fois, rencontrent l'axe principal soit directement, soit par interférence dans le voisinage des foyers. Outre ces cas, il peut aussi être question de l'action exercée par la diffraction des rayons qui dépassent le contour de la sphère; mais ces phénomènes de diffraction ne se produisent que dans le voisinage du bord géométrique de l'ombre de la sphère, et ils seront dans un autre chapitre l'objet d'un examen plus détaillé.

Des développements qui précèdent il ressort, comme résultat général, que l'intensité lumineuse correspondant au carré de l'amplitude varie beaucoup aux différents points de l'axe principal, qu'elle est tantôt une grandeur du même ordre que l'unité, c'est-à-dire que l'intensité de la lumière incidente, tantôt une grandeur du même ordre que α aux foyers des rayons centraux et sur les lignes focales des autres rayons, et enfin aussi une grandeur de l'ordre de $\alpha^{\frac{1}{3}}$ à quelques-unes des extrémités des lignes focales. En ces derniers foyers, l'intensité, pour une sphère *infiniment* grande, serait donc plus grande qu'en tout autre point de l'axe (comme aussi en dehors de l'axe); mais en réalité, si nous nous maintenons dans des limites pratiques, l'intensité en ces points est toujours bien moindre qu'au premier foyer des rayons centraux, correspondant à $m = 0$. Si nous prenons comme exemple $N = 1{,}5$, un pareil foyer extérieur ne se produira qu'après trois réflexions intérieures. En posant $m = 3$, on trouve

$$\theta = 73^\circ 39' 16'',6, \quad \theta' = 39^\circ 46' 15'',8, \quad \vartheta = 9^\circ 8' 26'',8,$$

correspondant à $G = 2\pi$ et à $H = 0$. Si l'on suppose en outre $a = 40000\,\pi$, la formule (50), en ne prenant que le terme de l'ordre le plus élevé, donnera une amplitude de 24,681* et une intensité de 609,14, tandis que l'intensité au premier foyer est, comme nous l'avons vu, de 217311, par conséquent un grand nombre de fois plus grande.

[NO]TE 31.

5. Cas de a très grand. Mouvement en dehors de l'axe principal.

Pour la fonction sphérique $P_n(\cos\varphi)$, on a la série connue

$$P_n(\cos\varphi) = 2\,\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots 2n}\Big(\cos n\varphi + \frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{1}{2}\cos(n-2)\varphi + \frac{2n(2n-1)}{(2n-1)(2n-3)}\,\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cos(n-4)\varphi + \ldots\Big),$$

série qui, pour n impair, se termine par le terme qui renferme $\cos\varphi$ et, pour n pair, par un terme constant dont on prend la moitié.

Nous supposerons maintenant ici que φ n'est ni nul ni très petit, et que n est un nombre très grand. La sommation de la série donnera alors, comme on sait, l'expression déjà trouvée par Laplace

$$P_n(\cos\varphi) = \sqrt{\frac{2}{\pi n \sin\varphi}}\cos\Big((n+\tfrac{1}{2})\varphi - \frac{\pi}{4}\Big).$$

On en déduit, en négligeant les grandeurs d'un ordre inférieur, l'expression

$$\frac{dP_n(\cos\varphi)}{d\varphi} = -\sqrt{\frac{2n}{\pi\sin\varphi}}\sin\Big((n+\tfrac{1}{2})\varphi - \frac{\pi}{4}\Big).$$

Substituons cette valeur dans les séries (31). Le point considéré étant supposé situé en dehors de l'axe principal, il ne pourra être rencontré par les rayons centraux, qui correspondent à $n < n_1$, et c'est pourquoi on n'a besoin de faire les sommations que de $n = n_1$ à $n = \infty$. Les séries pourront ainsi être exprimées par

$$\left.\begin{aligned}
K &= -\frac{\cos\psi}{a}\sum_{n_1}^{\infty}\sqrt{\frac{2\,q_n(a)}{\pi\,n\sin\varphi}}\,\sin\left((n+\tfrac{1}{2})\varphi-\frac{\pi}{4}\right)e^{\left(kt-\frac{n\pi}{2}-\lambda_n(a)\right)i}\,2k_n,\\
S &= -i\frac{\sin\psi}{a}\sum_{n_1}^{\infty}\sqrt{\frac{2\,q_n(a)}{\pi\,n\sin\varphi}}\,\sin\left((n+\tfrac{1}{2})\varphi-\frac{\pi}{4}\right)e^{\left(kt-\frac{n\pi}{2}-\lambda_n(a)\right)i}\,2s_n,\\
K' &= i\frac{\cos\psi}{a'}\sum_{n_1}^{\infty}\sqrt{\frac{2\,q_n(a')}{\pi\,n\sin\varphi}}\,\sin\left((n+\tfrac{1}{2})\varphi-\frac{\pi}{4}\right)e^{\left(kt-\frac{n\pi}{2}\right)i}\sin\lambda_n(a')\,2k'_n,\\
S' &= \frac{\sin\psi}{a'}\sum_{n_1}^{\infty}\sqrt{\frac{2\,q_n(a')}{\pi\,n\sin\varphi}}\,\sin\left((n+\tfrac{1}{2})\varphi-\frac{\pi}{4}\right)e^{\left(kt-\frac{n\pi}{2}\right)i}\sin\lambda_n(a')\,2s'_n.
\end{aligned}\right\}$$

Nous nous bornerons, dans ce chapitre, à effectuer ces sommations jusqu'à $n = n_2$, c'est-à-dire jusqu'à la limite la plus haute de n au-dessous de laquelle les fonctions q_n et λ_n se laissent exprimer par les formules (67) et (68).

Des séries K et S nous prenons, en procédant comme dans le chapitre précédent, la partie correspondant à

$$2k_n = -1, \quad 2s_n = -1.$$

Les termes dont elles se composent renfermeront les deux exposants

$$\left(kt-\frac{\pi n}{2}-\lambda_n(a)\pm\left((n+\tfrac{1}{2})\varphi-\frac{\pi}{4}\right)\right)i.$$

En y posant $n = \nu + z$, les coefficients de zi deviennent par le développement suivant les puissances de z

$$G = -\vartheta \pm \varphi,$$

où l'angle ϑ est compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ et l'angle φ entre 0 et π, sans qu'il atteignent ces limites. La condition $G = 2p\pi$ ne pourra donc être satisfaite que pour $p = 0$ et $\vartheta = \varphi$. Cela posé, la somme peut être changée en une intégrale de la forme (42), d'après laquelle on obtient par comparaison pour la série K

$$A = \frac{\cos\psi}{2ai}\sqrt{\frac{2}{\pi a \cos\vartheta \sin\vartheta \sin\varphi}} = -i\,\frac{\cos\psi}{a\sin\varphi\sqrt{2\pi a\cos\varphi}},$$

$$Fa = kt - a\cos\varphi - \frac{\pi}{4}, \quad H = -\frac{a}{2a\cos\varphi}.$$

Le résultat de l'intégration déterminé par (43) devient

$$-\frac{\cos\psi}{a\sin\varphi}\,e^{(ks - a\cos\varphi)i},$$

en supposant, à cause de l'équation $\vartheta = \varphi$, qu'on a $a\sin\varphi < a$ et $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$. Dans le cas contraire, le résultat devient nul.

On trouve d'une manière analogue pour la série S

$$i\,\frac{\sin\psi}{a\sin\varphi}\,e^{(kt - a\cos\varphi)i}.$$

En substituant ces deux valeurs de K et de S dans les équations (17), et en négligeant les termes d'un ordre inférieur à l'unité, on obtient pour la partie correspondante des composantes $\overline{\xi}_e$, $\overline{\eta}_e$, $\overline{\zeta}_e$

$$\overline{\xi}_e = -\sin\varphi\cos\psi\,e^{(kt - a\cos\varphi)i}, \quad \overline{\eta}_e = -\cos\varphi\cos\psi\,e^{(kt - a\cos\varphi)i},$$
$$\overline{\zeta}_e = \sin\psi\,e^{(kt - a\cos\varphi)i},$$

valeurs qui, on le voit, sont égales aux expressions des composantes de la lumière incidente données par les équations (13) avec des signes contraires. Ce résultat indique ainsi seulement que, lorsqu'on ne tient pas compte des rayons réfléchis et réfractés et, par conséquent, que la sphère est considérée comme étant entièrement noire et opaque, il régnera derrière la sphère éclairée une obscurité complète en dehors de l'axe principal, et jusqu'à une certaine distance de ce dernier. Nous avons vu dans le chapitre précédent que tel est aussi le cas même pour l'axe principal.

Nous considérons ensuite le terme des deux premières équations (69) qui correspond à

$$2k_n = -b_n e^{2\lambda_n(a)i}, \quad 2s_n = -c_n e^{2\lambda_n(a)i}.$$

Ces valeurs substituées dans les séries K et S donneront des termes avec les deux exposants

$$\left(kt - \frac{n\pi}{2} - \lambda_n(\alpha) + 2\lambda_n(a) \pm \left((n+\tfrac{1}{2})\varphi - \frac{\pi}{4}\right)\right)i,$$

où, par le développement suivant les puissances de z, le coefficient de zi devient

$$G = -\pi - \vartheta + 2\theta \pm \varphi.$$

Comme on doit avoir $\theta \geqq \vartheta$, correspondant à $a \geqq \alpha$, la condition $G = 2p\pi$ ne peut être satisfaite que par $p = 0$ et en prenant le signe supérieur. On a donc

$$G = -\pi - \vartheta + 2\theta + \varphi = 0.$$

Pour la somme K, on obtient ensuite, par comparaison avec l'intégrale (42), les coefficients

$$A = -i\,\frac{\cos\psi\, b_\nu}{a\sqrt{2\pi a \cos\vartheta \sin\theta \sin\varphi}},$$

$$Fa = kt - a\cos\vartheta + 2a\cos\theta + \frac{\pi}{4}, \qquad H = \frac{-\operatorname{tg}\vartheta + 2\operatorname{tg}\theta}{2\sin\theta}.$$

La valeur de l'intégrale déterminée par (43) devient alors

$$K = \frac{\cos\psi\, b_\nu}{a\sqrt{\cos\vartheta \sin\varphi\,(-\operatorname{tg}\vartheta + 2\operatorname{tg}\theta)}}\, e^{(kt - a\cos\vartheta + 2a\cos\theta)i}.$$

On trouve d'une manière analogue

$$S = \frac{-i\sin\psi\, c_\nu}{a\sqrt{\cos\vartheta \sin\varphi\,(-\operatorname{tg}\vartheta + 2\operatorname{tg}\theta)}}\, e^{(kt - a\cos\vartheta + 2a\cos\theta)i}.$$

En substituant ces valeurs dans les équations (17) pour la détermination des composantes du mouvement vibratoire, nous pouvons présenter quelques remarques d'une portée plus générale. Lorsque les series (79) exprimant K et S seront changées en intégrales, les exposants seuls entreront en ligne de compte si l'on différentie par rapport à a et à φ, en négligeant toutes les grandeurs
* NOTE 32. d'un ordre inférieur.* Ces exposants étant désignés par Fai, on a

$$\frac{\partial Fa}{\partial \nu} = G = 2p\pi.$$

Tout multiple de $2\pi i$ pouvant être supprimé dans l'exposant, on aura, en prenant θ pour variable indépendante au lieu de ν, $\frac{\partial Fa}{\partial \theta} = 0$, d'où il suit, si en même temps a est variable, que

* NOTE 33.

$$\frac{\partial Fa}{\partial a} = -\cos\vartheta.^*$$

En outre, φ doit entrer dans Fa de manière que l'on ait

$$\frac{\partial Fa}{\partial \varphi} = \pm(\nu + \tfrac{1}{2}) = \pm a \sin\vartheta,^{*}$$ * NOTE 3

le signe correspondant à celui avec lequel φ entre dans Fa.

On obtiendra ainsi en général

$$\xi_e = \sin^2\vartheta \cdot aK, \quad \eta_e = + \sin\vartheta\cos\vartheta \cdot aK, \quad \zeta_e = \mp i \sin\vartheta \cdot aS. \quad (80)$$

En appliquant ces résultats au cas calculé plus haut, on trouve

$$\xi_e \cos\vartheta - \eta_e \sin\vartheta = 0,$$

$$\xi_e \sin\vartheta + \eta_e \cos\vartheta = \frac{\cos\psi\, b_\nu \sin\vartheta}{V\cos\vartheta \sin\varphi(-\mathrm{tg}\,\vartheta + 2\,\mathrm{tg}\,\theta)} e^{(kt - a\cos\vartheta + 2a\cos\theta)i},$$

$$\zeta_e = \frac{\sin\psi\, c_\nu \sin\vartheta}{V\cos\vartheta \sin\varphi(-\mathrm{tg}\,\vartheta + 2\,\mathrm{tg}\,\theta)} e^{(kt - a\cos\vartheta + 2a\cos\theta)i}.$$

Cette partie du mouvement de la lumière correspond au mouvement des rayons réfléchis par la surface antérieure de la sphère, et les mêmes résultats peuvent facilement être obtenus par la voie élémentaire. θ étant l'angle d'incidence, ϑ l'angle aigu que le rayon réfléchi fait avec le rayon vecteur, la loi de la réflexion donnera $-\pi - \vartheta + 2\theta + \varphi = 0$. Le rayon réfléchi a un foyer imaginaire à la distance $\frac{a}{2}\cos\theta$ (mesurée avec $\frac{\lambda}{2\pi}$ comme unité de longueur) de l'élément réfléchissant de la sphère. La distance du point considéré à cet élément est $a\cos\vartheta - a\cos\theta$, et sa distance au foyer $a\cos\vartheta - \frac{1}{2}a\cos\theta$.

Si le point considéré est situé à la surface même de la sphère, on a $\vartheta = \theta = \pi - \varphi$, et, avec le système d'axes que nous avons choisi, les composantes de la lumière incidente sont ici

$$\xi_0 = \sin\varphi\cos\psi C, \quad \eta_0 = \cos\varphi\cos\psi C, \quad \zeta_0 = -\sin\psi C,$$
$$C = e^{(kt + a\cos\theta)i}.$$

Dans le plan d'incidence, les vibrations sont donc représentées par

$$\bar{\eta}_0 \cos\theta - \bar{\xi}_0 \sin\theta = -\cos\psi\, C,$$

expression qui, d'après les lois de Fresnel, est changée par la réflexion en

$$\frac{\operatorname{tg}(\theta-\theta')}{\operatorname{tg}(\theta+\theta')}\cos\psi\, C = b_\nu \cos\psi\, C,$$

tandis que les vibrations perpendiculaires au plan d'incidence deviennent après la réflexion

$$\frac{\sin(\theta-\theta')}{\sin(\theta+\theta')}\sin\psi\, C = -c_\nu \sin\psi\, C.$$

Dans le rayon réfléchi l'intensité doit ensuite décroître dans le même rapport que croît l'aire sur laquelle la lumière se répand, et l'amplitude, par conséquent, proportionnellement à la racine carrée de cette aire.

Cette aire est, au point considéré, déterminée par

$$\left(a\cos\vartheta - \frac{\alpha}{2}\cos\theta\right) 2\, d\theta \cdot a \sin\varphi\, d\psi,$$

qui, pour $a = \alpha$, à quoi correspond $\vartheta = \theta = \pi - \varphi$, devient

$$a\cos\theta\, d\theta \cdot a\sin\theta\, d\psi.$$

Le rapport entre ces deux éléments est

$$\frac{a^2 \sin\theta\cos\theta}{(2a\cos\vartheta - \alpha\cos\theta)\, a\sin\varphi} = \frac{\sin^2\vartheta}{\cos\vartheta\sin\varphi(-\operatorname{tg}\vartheta + 2\operatorname{tg}\theta)},$$

a et α étant éliminés par l'équation $a\sin\vartheta = \alpha\sin\theta$.

On voit qu'on arrive ainsi exactement au même résultat qui a été trouvé plus haut.

Si enfin on introduit dans les développements (79) de K et de S le terme général des deux premières séries (69), à savoir

$$k_n = b_{n,m} e^{2(\lambda_n(\alpha) - (m+1)\lambda_n(\alpha'))i},$$
$$s_n = c_{n,m} e^{2(\lambda_n(\alpha) - (m+1)\lambda_n(\alpha'))i},$$

les termes renfermeront les exposants

$$\left(kt - \frac{n\pi}{2} - \lambda_n(a) + 2\lambda_n(a) - (2m+2)\lambda_n(a') \pm \left((n+\tfrac{1}{2})\varphi - \frac{\pi}{4}\right)\right)i.$$

En développant suivant les puissances de z, le coefficient de zi deviendra

$$G = m\pi - \vartheta + 2\theta - (2m+2)\theta' \pm \varphi.$$

L'angle dont le rayon incident a dévié après m réflexions intérieures (p. 449) est ici $m\pi + 2\theta - (2m+2)\theta' = J_m$, de sorte que l'équation peut aussi s'écrire $G = J_m - \vartheta \pm \varphi$. On voit par là que la condition $G = 2p\pi$ est remplie quand l'angle d'incidence θ est choisi de façon que le rayon, après m réflexions intérieures, rencontre le point considéré, et qu'on prenne le signe supérieur ou le signe inférieur, suivant que ce point et le rayon incident sont situés du même côté ou du côté opposé de l'axe principal.

Pour la somme K on obtient ensuite, par comparaison avec l'intégrale (42), le coefficient

$$A = \pm i \frac{2\cos\psi\, b_{\nu,m}}{a\sqrt{2\pi\alpha}\cos\vartheta \sin\theta \sin\varphi},$$

pour la somme S le coefficient

$$A = \pm \frac{2\sin\psi\, c_{\nu,m}}{a\sqrt{2\pi\alpha}\cos\vartheta \sin\theta \sin\varphi},$$

et pour les deux sommes les coefficients

$$Fa = kt - a\cos\vartheta + 2a\cos\theta - (2m+2)\,a'\cos\theta' + (p - \tfrac{1}{2}m \mp \tfrac{1}{4})\,\pi,$$

$$H = \frac{1}{2\sin\theta}(-\operatorname{tg}\vartheta + 2\operatorname{tg}\theta - (2m+2)\operatorname{tg}\theta'),$$

$$I = \frac{1}{6\sin^2\theta}(-\operatorname{tg}^3\vartheta + 2\operatorname{tg}^3\theta - (2m+2)\operatorname{tg}^3\theta').$$

Le résultat est donné par la formule (43) et, dans le cas où $H = 0$, par la formule (49). Dans le premier cas, le déplacement, dont les composantes sont déterminées par les équations (80), sera du même ordre que l'unité, dans le second cas ($H = 0$), qui représente toutes les caustiques, de l'ordre de $a^{\frac{1}{6}}$, et l'intensité de l'ordre de $a^{\frac{1}{3}}$. Comme toutes les grandeurs d'un ordre inférieur à l'unité ont partout été négligées dans ce calcul, on n'aura donc ici à prendre que le premier terme de la formule (49).

Les conditions du mouvement de la lumière dans le voisinage des caustiques résultent des calculs qui se rattachent à la formule (49) et de la discussion qui les accompagne (p. 427). On voit par là que lorsque H converge vers 0, c'est-à-dire lorsque nous nous rapprochons de la caustique du côté où les rayons rectilignes réfractés et m fois réfléchis peuvent s'étendre ($G = 2p\pi$), l'amplitude des vibrations croîtra par un mouvement périodique de l'ordre de a^0 à l'ordre de $a^{\frac{1}{6}}$. Le dernier et le plus grand maximum est atteint avant que nous atteignions la caustique elle-même, après quoi l'amplitude décroît jusqu'à la valeur déterminée par la formule (50) et correspondant à la caustique ($H = 0$, $G = 2p\pi$). L'amplitude décroît ensuite rapidement jusqu'à 0. Au point maximum, tout près de la caustique, l'amplitude est 1,504, et l'intensité 2,262 fois plus grande que sur la caustique.

La détermination de l'intensité de la lumière sur la caustique et dans son voisinage présentant un intérêt particulier, notamment par rapport à la *théorie de l'arc-en-ciel*, je mettrai les formules sous une forme plus commode pour le calcul numérique.

Désignons par $I_m(\varphi)$ l'intensité des rayons réfléchis m fois par la surface intérieure de la sphère au point déterminé par φ, ψ, a. L'amplitude est déterminée par les équations (80); après quoi on trouve l'intensité, c'est-à-dire le carré de l'amplitude, exprimée par

$$I_m(\varphi) = a^2 \sin^2 \vartheta \text{ ampl.} (K^2 + S^2).$$

D'après la formule générale (49), dont on ne prend que le premier terme, on a

$$\text{Ampl. } K^2 = \frac{4\,\alpha^{\frac{4}{3}}}{9\,I^{\frac{2}{3}}} Q^2 A^2, \quad \text{où } A^2 = \frac{2\cos^2\psi\, b^2_{\nu,m}}{a^2 \alpha\pi \cos\vartheta \sin\theta \sin\varphi},$$

$$\text{Ampl. } S^2 = \frac{4\,\alpha^{\frac{4}{3}}}{9\,I^{\frac{2}{3}}} Q^2 A^2, \quad \text{où } A^2 = \frac{2\sin^2\psi\, c^2_{\nu,m}}{a^2 \alpha\pi \cos\vartheta \sin\theta \sin\varphi}.$$

Si la lumière incidente n'est pas polarisée, comme nous le supposerons dans ce qui suit, on obtiendra l'intensité en la considérant comme la valeur moyenne correspondant à toutes les valeurs de ψ de 0 à 2π. Nous poserons donc

$$\cos^2\psi\, b^2_{\nu,m} + \sin^2\psi\, c^2_{\nu,m} = \tfrac{1}{2}(b^2_{\nu,m} + c^2_{\nu,m}).$$

A l'aide de cette expression et de la valeur de I donnée plus haut, on obtient

$$I_m(\varphi) = \frac{4\,\alpha^{\frac{4}{3}} Q^2 \sin^2\vartheta}{9\pi \sin\varphi \cos\vartheta \sin\theta} \left(\frac{6\sin^2\theta}{-\operatorname{tg}^2\vartheta + 2\operatorname{tg}^2\theta - (2m+2)\operatorname{tg}^2\theta'} \right)^{\frac{2}{3}} (b^2_{\nu,m} + c^2_{\nu,m}).$$

En introduisant deux nouvelles notations p et p', déterminées par

$$\operatorname{tg}\theta = p \operatorname{tg}\theta', \quad N^2 p' = p,$$

on trouve

$$b_{\nu, m} = 2N\cos\theta\cos\theta' \frac{(N\cos\theta - \cos\theta')^m}{(N\cos\theta + \cos\theta')^{m+2}} = 2p' \frac{(1-p')^m}{(1+p')^{m+2}},$$

$$c_{\nu, m} = 2N\cos\theta\cos\theta' \frac{(\cos\theta - N\cos\theta')^m}{(\cos\theta + N\cos\theta')^{m+2}} = 2p \frac{(1-p)^m}{(1+p)^{m+2}}.$$

Les angles θ, θ' et ϑ sont en même temps déterminés par

$$\sin\theta = N\sin\theta' = \sqrt{\frac{p^2-N^2}{p^2-1}}, \quad \operatorname{tg}\vartheta = 2(p-m-1)\operatorname{tg}\theta',$$

de même qu'on a

$$a\sin\vartheta = \alpha\sin\theta, \quad a\lambda = 2\pi R, \quad \alpha\lambda = 2\pi r,$$

R étant le rayon de la sphère, r la distance du point au centre, tous deux mesurés comme λ avec une unité de longueur arbitraire, et (voir p. 427)

$$Q = 3\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}} W.$$

Par ces substitutions, la formule de l'intensité peut prendre la forme

$$I_m(\varphi) = \frac{W^2}{\sin\varphi} C_m, \qquad (a)$$

où C_m est indépendant de φ et déterminé par

$$\left.\begin{aligned} C_m &= \frac{R^2}{r^2} \cdot \frac{48p^2(N^2-1)}{\cos\vartheta(p^2-1)} \left(\frac{R(p^2-N^2)^{\frac{1}{2}}}{6\lambda(p^2-1)^{\frac{1}{2}}(p^2-4(p-m-1)^2-m-1)^2}\right)^{\frac{1}{3}} \\ &\quad \times \left(p'^2 \frac{(1-p')^{2m}}{(1+p')^{2m+4}} + p^2 \frac{(1-p)^{2m}}{(1+p)^{2m+4}}\right), \\ \cos\vartheta &= \frac{p\sqrt{N^2-1}}{\sqrt{p^2(N^2-1)+4(p-m-1)^2(p^2-N^2)}}. \end{aligned}\right\}$$

La quantité W introduite dans la formule (a) est déterminée par

$$W = \int_0^\infty \cos \frac{\pi}{2}(\omega^3 - \mu\omega)\, d\omega,$$

où μ dépend de φ de la manière suivante: on suppose que φ_0 est une valeur de φ correspondant à la caustique et, par conséquent, déterminée par

$$G = m\pi - \vartheta + 2\theta - (2m+2)\theta' \pm \varphi_0 = 2p_1\pi,$$

où p_1 est un nombre entier. Le signe de φ_0, qui est compris entre 0 et π, est déterminé par l'équation même.

En posant maintenant $\varphi = \varphi_0 \mp \delta$, on obtient $G - 2p_1\pi = -\delta$; mais d'après (46) on a

$$G - 2p_1\pi = -\varepsilon\left(\frac{I}{a^2}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad \text{où} \quad \varepsilon = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\mu.$$

On obtient ainsi, en introduisant en même temps la valeur donnée de I,

$$\delta = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\mu\left(\frac{-\operatorname{tg}^3\vartheta + 2\operatorname{tg}^3\theta - (2m+2)\operatorname{tg}^3\theta'}{6a^2\sin^2\theta}\right)^{\frac{1}{3}},$$

et avec les substitutions employées plus haut

$$\delta = \mu\left(\frac{\lambda^2(p^2-1)(p^3 - 4(p-m-1)^3 - m - 1)(p^2-N^2)^{\frac{1}{2}}}{48R^2p^3(N^2-1)^{\frac{3}{2}}}\right)^{\frac{1}{3}}. \qquad (c)$$

Dans le cas où a peut être considéré comme infiniment grand (*l'arc-en-ciel*), on a $\vartheta = 0$, $p = m+1$, de sorte que les formules (b) et (c) se réduisent à

$$J_m = \frac{R^2}{r^2}\cdot\frac{48p^2(N^2-1)}{p^2-1}\left(\frac{R(p^2-N^2)^{\frac{1}{2}}}{6\lambda p^2(p^2-1)^{\frac{5}{2}}}\right)^{\frac{1}{3}}\left(p'^2\frac{(1-p')^{2m}}{(1+p')^{2m+4}} + p^2\frac{(1-p)^{2m}}{(1+p)^{2m+4}}\right), \qquad (b')$$

$$\delta = \mu\left(\frac{\lambda^2(p^2-1)^2(p^2-N^2)^{\frac{1}{2}}}{48R^2p^2(N^2-1)^{\frac{3}{2}}}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

L'équation $W = 0$, qui correspond à $I_m(\varphi) = 0$, donne, comme il a été dit p. 426, une série de valeurs de μ, dont celle de l'ordre q, pour des valeurs suffisamment grandes de q, est déterminée par $\mu = 3(q - \frac{1}{4})^{\frac{2}{3}}$. A cette valeur correspondra

$$\delta = \frac{1}{4}\left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{1}{3}}\left[\frac{(p^2-1)^2(p^2-N^2)^{\frac{1}{2}}}{p^2(N^2-1)^{\frac{3}{2}}}\right]^{\frac{1}{3}}\left(\frac{\lambda}{R}(4q-1)\right)^{\frac{2}{3}},$$

forme sous laquelle le résultat, obtenu par la voie élémentaire, a dernièrement été exposé par M. Boitel*, avec cette différence toutefois que, dans le premier membre de l'équation, δ est, chez M. Boitel, remplacé par $\operatorname{tg}\delta$. Par contre M. Mascart**, dans le calcul de quelques expériences faites avec une tige de verre, s'est servi de la formule $\delta = A(q - \frac{1}{4})^{\frac{2}{3}}$ et a trouvé, même pour d'assez grandes valeurs de δ (9°), un accord satisfaisant entre l'expérience et le calcul.

L'intensité sur la caustique même ($\mu = 0$) est déterminée par

$$I_m(\varphi_0) = \frac{\Gamma(\frac{1}{3})^2}{12}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}}\frac{C_m}{\sin\varphi_0},$$

d'où l'on peut, avec une approximation suffisante, en multipliant par 2,262, déduire *l'intensité maximum*, correspondant à $\mu = 1{,}0845$ (la valeur de φ correspondant à cette valeur de μ différant très peu de φ_0). J'ai de cette manière calculé l'intensité maximum dans quelques exemples.

Soit $R = 10^{\text{mm}}$, $N = 1{,}5$, $\lambda = 0^{\text{mm}}{,}0005$, $m = 1$. Pour un point immédiatement extérieur à la surface

---

* Journ. de phys., 2e sér., t. 8, p. 282. 1889.

** Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 106, p. 1575. 1888.

de la sphère, on a $r = R$, $\vartheta = \theta$, $\operatorname{tg}\theta = 4\operatorname{tg}\theta'$ et par conséquent $p = 4$, $p' = \frac{16}{9}$; C_m étant déterminé par la formule (b), on trouve avec ces valeurs que l'intensité est égale à 4,5423. Cette intensité étant proportionnelle à $R^{\frac{1}{3}}$, on voit que, même pour des sphères presque 100 fois plus petites, l'intensité sera plus grande que 1. A la distance d'un demi-rayon de la surface de la sphère, on a $r = 1{,}5\,R$, $\vartheta = \theta'$, $p = \frac{5}{2}$, $p' = \frac{10}{9}$, valeurs auxquelles correspond une intensité maximum de 0,9423.

Il ressort de ces résultats que, pour ainsi dire dans tous les cas de sphères transparentes qui se présentent, on pourra trouver hors de la sphère des points qui sont *tout aussi fortement* éclairés d'un côté par la lumière directe incidente que de l'autre par la lumière réfléchie une fois par la surface intérieure de la sphère. Comme il sera sans doute facile de trouver expérimentalement de pareils points, et qu'ils pourront également être déterminés théoriquement par les formules données plus haut, on aura un moyen pour contrôler l'accord entre l'expérience et le calcul.

Pour second exemple je prendrai une goutte d'eau sphérique avec l'indice de réfraction $\frac{4}{3}$. Pour $m = 1$ et a infiniment grand on trouve:

$$\text{Intensité maximum} = 0{,}06728\,\frac{R^2}{r^2}\left(\frac{R}{\lambda}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Si l'on prend comme comparaison une seconde sphère de même grandeur à réflexion totale, l'intensité de la lumière réfléchie par la surface antérieure sera, à la même distance, de $\frac{R^2}{4r^2}$. Ces deux intensités seront donc égales si l'on a $R = 51{,}30\,\lambda$, ce qui, pour

$\lambda = 0^{mm},000585$, donne $R = 0^{mm},03$. Pour une goutte de pluie d'un rayon 8 fois plus grand, l'intensité maximum de la lumière réfléchie une fois par la surface intérieure serait le double de celle qu'on obtiendrait en remplaçant la goutte de pluie par une sphère de même grandeur produisant une réflexion totale.

Au lieu d'une seule sphère, figurons-nous maintenant un assemblage de sphères égales isolées, toutes aussi fortement éclairées par des rayons incidents parallèles non polarisés d'une intensité égale à 1. Les sphères sont supposées si voisines ou former une couche d'une étendue telle que les lignes visuelles d'un observateur éloigné rencontrent partout une des sphères. L'ensemble des sphères renfermées dans un cône dont le sommet est dans l'œil de l'observateur, et qui comprend l'unité d'angle solide, enverra alors une lumière dont l'intensité au sommet du cône est $\frac{r^2}{\pi R^2}$ fois plus grande que celle qui est due à une seule sphère. En appelant l'intensité de la lumière qui, en dedans de l'unité d'angle solide, rencontre l'œil de l'observateur, la *clarté apparente*, nous aurons donc pour un pareil assemblage de gouttes de pluie sphériques avec l'indice de réfraction $\frac{4}{3}$:

$$\text{Max. de clarté apparente} = 0{,}06728\,\frac{1}{\pi}\left(\frac{R}{\lambda}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Pour un assemblage analogue de sphères produisant une réflexion totale, on obtiendrait la clarté apparente $\frac{1}{4\pi}$, indépendante de la grandeur des sphères. Mais, en faisant la comparaison, il faut observer que toute la lumière qui rencontre le système après une seule réflexion est renvoyée par de nouvelles réflexions, et c'est pourquoi il convient de doubler la clarté apparente ou de la

poser égale à $\frac{1}{2\pi}$. Cela posé, les deux systèmes éclairés par une lumière simple ou regardés à travers un verre unicolore seront vus avec la même clarté apparente, lorsque le rayon des gouttes de pluie est 8 fois plus grand, comme on l'a calculé plus haut, et qu'il est par conséquent de $0^{mm},24$.

Les phénomènes lumineux, dans l'assemblage de gouttes de pluie que nous considérons ici, correspondent à des *arcs-en-ciel complètement développés.* Le calcul de la clarté apparente de *ces arcs-en-ciel* et des *arcs-en-ciel surnuméraires* pourra se faire, pour les différentes couleurs du spectre, à l'aide des formules (a), (b'), (c'), conjointement avec une table des valeurs de l'intégrale W. Nous ajouterons enfin, comme exemple permettant de contrôler les observations, que le second arc-en-ciel, après deux réflexions intérieures, a une clarté apparente 7,864 plus faible que le premier arc-en-ciel, supposé bien entendu qu'ils sont formés dans les mêmes conditions.

Le mouvement de la lumière à *l'intérieur* d'une sphère devra être déterminé à l'aide des séries K' et S' (70), en y posant

$$k'_n = \beta_{n,m} e^{(\lambda_n(\alpha) - (2m+1)\lambda_n(\alpha'))i},$$
$$s'_n = \gamma_{n,m} e^{(\lambda_n(\alpha) - (2m+1)\lambda_n(\alpha'))i}.$$

Dans les termes figureront les quatre exposants

$$\left(kt - \frac{n\pi}{2} + (\pm)\lambda_n(\alpha') + \lambda_n(\alpha) - (2m+1)\lambda_n(\alpha') \pm \left((n+\tfrac{1}{2})\varphi - \frac{\pi}{4}\right)\right)i,$$

qui, par le développement suivant les puissances de z, donnent pour le coefficient de zi

$$G = (2m-1)\frac{\pi}{2} + (\pm)\left(\vartheta' - \frac{\pi}{2}\right) + \theta - (2m+1)\theta' \pm \varphi.$$

Dans cette expression $m\pi + \theta - (2m+1)\vartheta' = J'_m$ est l'angle dont le rayon incident est dévié après m reflexions intérieures. La condition $G = 2p\pi$ lève l'ambiguïté des deux doubles signes, et on voit que, de même que pour un point extérieur, le signe superieur de φ correspond au cas où le point considéré et le rayon incident sont du même côté de l'axe principal, et que ϑ' et φ ont le même signe ou un signe contraire suivant que le rayon qui rencontre le point considéré coupe le côté positif ou le côté négatif de l'axe principal.

En comparant avec l'intégrale (42), on obtient ensuite pour les séries K' et S' respectivement les coefficients

$$A = \mp(\pm)\frac{i\cos\psi\,\beta_{\nu,m}}{a'\sqrt{2\pi a\cos\vartheta'\sin\theta\sin\varphi}}$$

et

$$A = \mp(\pm)\frac{\sin\psi\,\gamma_{\nu,m}}{a'\sqrt{2\pi a\cos\vartheta'\sin\theta\sin\varphi}},$$

et pour les deux séries

$$F\alpha = kt + (\pm)\left(a'\cos\vartheta' + \frac{\pi}{4}\right) + a\cos\theta - (2m+1)a'\cos\vartheta' + (p - \tfrac{1}{2}m + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4})\pi$$

$$H = \frac{1}{2\sin\theta}((\pm)\operatorname{tg}\vartheta' + \operatorname{tg}\theta - (2m+1)\operatorname{tg}\vartheta'),$$

$$I = \frac{1}{6\sin^2\theta}((\pm)\operatorname{tg}^3\vartheta' + \operatorname{tg}^3\theta - (2m+1)\operatorname{tg}^3\vartheta').$$

Les composantes du mouvement vibratoire ξ', η', ζ' sont déterminées par les équations suivantes analogues à (80), à savoir

$$\left.\begin{aligned} \xi' = \sin^2\vartheta' a' K', \quad \eta' = \mp(\pm)\sin\vartheta'\cos\vartheta' a' K', \\ \zeta' = \mp i a'\sin\vartheta' S'. \end{aligned}\right\} \quad (81)$$

Le mouvement de la lumière est ainsi determiné partout en tant qu'il est suffisant de faire les somma-

tions par rapport à n sans dépasser la limite $n = n_2$, ce qui présuppose qu'on peut se servir des expressions (67) et (68) de q_n et de λ_n, lesquelles à leur tour déterminent les fonctions v_n et w_n. Si cette limite de n doit être franchie, il devient nécessaire de recourir à d'autres développements pour ces fonctions, et c'est ce que je ferai dans le chapitre suivant.

Je ferai seulement encore remarquer que, lorsque ϑ' atteint la limite $\frac{\pi}{2}$ en des points intérieurs *isolés*, le mouvement se laisse aussi calculer par les formules données plus haut, ce qu'on peut prouver de la même manière que dans le cas déjà traité (p. 452), quand le point était situé sur l'axe principal.

6. Suite. Réflexion totale, diffraction.

Les fonctions v_n et w_n peuvent aussi être déterminées d'une manière autre que celle que nous avons employée précédemment (p. 435), par un développement d'ailleurs tout à fait correspondant. On a identiquement

$$v_n = \sqrt{v_n w_n}\, e^{\frac{1}{2}\log\frac{v_n}{w_n}}, \quad w_n = \sqrt{v_n w_n}\, e^{-\frac{1}{2}\log\frac{v_n}{w_n}}.$$

Si l'on pose

$$v_n w_n = r_n, \quad \tfrac{1}{2}\log\frac{v_n}{w_n} = \mu_n,$$

on aura donc

$$v_n = \sqrt{r_n}\, e^{\mu_n}, \quad w_n = \sqrt{r_n}\, e^{-\mu_n}. \tag{82}$$

En se servant de l'équation $w_n v_n' - w_n' v_n = 1$, on obtiendra en outre, la variable étant désignée par a,

$$\frac{d\mu_n}{da} = \frac{1}{2r_n}, \tag{83}$$

d'où, en intégrant et en introduisant la valeur de μ_n correspondant à $a = 0$, on tire

$$\mu_n = \tfrac{1}{2}\log\frac{a^{2n+1}}{1^2.3^2\ldots(2n-1)^2(2n+1)} + \int_0^a da\left(\frac{1}{2r_n} - \frac{2n+1}{2a}\right). \quad (84)$$

Les développements (22) et (24) de v_n et de w_n donnent en outre par multiplication

$$2r_n = \frac{2a}{2n+1} + \frac{(2a)^3}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}\cdot\frac{1}{2} + \frac{(2a)^5}{(2n-3)(2n-1)\ldots(2n+5)}\cdot\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4} + \ldots \quad (85)$$

L'exactitude de la loi indiquée ici pour la série pourrait aussi être démontrée par la formation de l'équation différentielle à laquelle satisfait r_n. En supposant que u_n satisfasse à l'équation différentielle (21), on peut poser d'une manière plus générale

$$u_n = \sqrt{p_n}\, e^{c\int\frac{da}{p_n}}, \quad (86)$$

valeur qui, substituée dans (21), conduit à l'équation

$$p_n\frac{d^2p_n}{da^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{dp_n}{da}\right)^2 + \left(1 - \frac{n(n+1)}{a^2}\right)2p_n^2 + 2c^2 = 0, \quad (87)$$

d'où, par une nouvelle différentiation, résulte l'équation linéaire

$$\frac{d^3p_n}{da^3} + 4\left(1 - \frac{n(n+1)}{a^2}\right)\frac{dp_n}{da} + \frac{4n(n+1)}{a^3}p_n = 0. \quad (88)$$

L'équation (86) correspond aux équations (82) pour $p_n = r_n$ et $c = \pm\frac{1}{2}$, de même qu'elle correspond aux équations (63) pour $p_n = q_n$ et $c = \pm i$. La dernière équation (88) doit donc être satisfaite aussi bien pour $p_n = q_n$ que pour $p_n = r_n$, et alors il ne sera pas diffi-

cile, à l'aide de cette équation, de contrôler l'exactitude des lois des séries indiquées q_n et r_n.

Aussi bien n que a sont considérés comme de grands nombres, tous deux de l'ordre de α. Si, de même qu'auparavant pour la sommation de la série q_n, nous négligeons toutes les grandeurs d'un ordre inférieur à l'unité, la série (85) pourra, sous certaines conditions, être sommée par

$$2 r_n = \frac{a}{\sqrt{(n+\frac{1}{2})^2 - a^2}}. \tag{89}$$

La condition doit consister en ceci, que a ne doit pas dépasser une certaine limite; mais en examinant de plus près la série, on remarquera bientôt que la détermination de cette limite présente quelques difficultés. En effet les termes de la série, pour $a < n$, décroissent d'abord et atteignent un minimum; après quoi ils croissent, changent alternativement de signe et atteignent un maximum pour finalement décroître jusqu'à 0. Ainsi le terme qui précède le premier terme négatif a déjà atteint la grandeur

$$\frac{(2a)^{2n+1}}{1\cdot 3 \ldots (4n+1)} \cdot \frac{1\cdot 3 \ldots (2n-1)}{2\cdot 4 \ldots 2n},$$

qui, pour $ea > 2n+1$, a étant par exemple égal à $0{,}75\,n$ et n allant en croissant, croît jusqu'à l'infini.* * NOTE 35.

Il sera donc nécessaire de mettre la série r_n sous une autre forme. A l'aide de l'équation

$$\frac{1\cdot 2\cdot 3 \ldots 2m}{(2n-2m+1)(2n-2m+3)\ldots(2n+2m+1)} = (-1)^m \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \sin(2n+1)x \sin^{2m} x,$$

on peut donner à la série (85) la forme

$$2 r_n = 2a \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \sin(2n+1)x \left(1 - \frac{a^2}{1^2}\sin^2 x + \frac{a^4}{1^2\cdot 2^2}\sin^4 x - \ldots\right),$$

et en employant la fonction J_0 de Bessel, cette expression devient

$$2r_n = 2a\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \sin(2n+1)x \cdot J_0(2a\sin x). \qquad (90)$$

Nous effectuerons cette intégration d'abord depuis $x = 0$ jusqu'à $x = h$, h étant assez petit pour qu'on puisse sans erreur sensible remplacer $\sin x$ par x, tant que x est plus petit que h. Cette partie de l'intégrale, par l'introduction d'une nouvelle variable $y = (2n+1)x$, deviendra ainsi

$$\frac{a}{n+\frac{1}{2}}\int_0^{(2n+1)h} dy \sin y J_0\left(\frac{ay}{n+\frac{1}{2}}\right)$$

$$= \frac{a}{n+\frac{1}{2}}\int_0^{(2n+1)h} dy \sin y\left(1-\left(\frac{ay}{n+\frac{1}{2}}\right)^2\frac{1}{2^2}+\left(\frac{ay}{n+\frac{1}{2}}\right)^4\frac{1}{2^2\cdot 4^2}-\dots\right). \quad (91)$$

La limite supérieure de cette intégrale pourra être considérée comme appartenant à cette espèce de grandeurs arbitraires et indéterminées auxquelles nous avons donné la désignation commune ω, et l'intégration pourra par suite se faire par la formule (39). Le résultat est la série

$$\frac{a}{n+\frac{1}{2}}+\left(\frac{a}{n+\frac{1}{2}}\right)^3\frac{1}{2}+\left(\frac{a}{n+\frac{1}{2}}\right)^5\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}+\dots = \frac{a}{\sqrt{(n+\frac{1}{2})^2-a^2}},$$

où la seule condition de convergence est $a < n+\frac{1}{2}$.

Dans la seconde partie de l'intégrale (90), la fonction de Bessel peut être développée suivant les puissances décroissantes de a en la série semi-convergente connue

$$J_0(2a\sin x) = \frac{1}{\sqrt{\pi a \sin x}}\cos\left(2a\sin x - \frac{\pi}{4}\right)+\dots$$

où les termes sont de l'ordre de $a^{-\frac{1}{2}}$, $a^{-\frac{3}{2}}$, ...

Cette partie de l'intégrale, en négligeant les termes suivants de la fonction J_0, deviendra donc

$$\frac{a}{n+\frac{1}{2}}\int_{(2n+1)h}^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} dy \frac{\sin y \cos\left(2a\sin\frac{y}{2n+1}-\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{\pi a \sin\frac{y}{2n+1}}}$$

$$=\frac{a}{(2n+1)\pi}\int_{(2n+1)h}^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} dy \frac{\sin\left(\left(1+\frac{a}{n+\frac{1}{2}}\right)y-\frac{ay^3}{24(n+\frac{1}{2})^3}+\ldots-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\left(1-\frac{a}{n+\frac{1}{2}}\right)y+\frac{ay^3}{24(n+\frac{1}{2})^3}-\ldots-\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{y-\frac{y^3}{24(n+\frac{1}{2})^2}+\ldots}}. \quad (92)$$

On voit par là que cette partie de l'intégrale sera d'un ordre inférieur à l'unité tant que la différence $n+\frac{1}{2}-a$ est de l'ordre de α*, et comme l'équation (89) présuppose que ces grandeurs n'entrent pas en ligne de compte, cette dernière équation restera valable, pourvu seulement que la différence $n+\frac{1}{2}-a$ soit positive et de l'ordre de α. Cette condition correspond ainsi complètement, avec l'échange de a et de $n+\frac{1}{2}$, à celle concernant q_n dans l'équation (67). * NOTE 36.

Si, dans l'équation (84), on pose

$$1^2\cdot 3^2\ldots(2n-1)^2(2n+1) = 2(2n+1)^{2n+1}e^{-(2n+1)}\text{*},$$ * NOTE 37.

n étant supposé très grand, on obtient à l'aide de l'équation (89)

$$\mu_n = -\tfrac{1}{2}\log 2+(n+\tfrac{1}{2})\log\frac{n+\frac{1}{2}-\sqrt{(n+\frac{1}{2})^2-a^2}}{a}+\sqrt{(n+\tfrac{1}{2})^2-a^2}. \quad (93)$$

Nous sommes ainsi à même de déterminer les fonctions v_n et w_n tant pour $n+\frac{1}{2}>a$ que pour $n+\frac{1}{2}<a$, dans le premier cas à l'aide de r_n et de μ_n, dans le second à l'aide de q_n et de λ_n. Mais il reste encore un cas où ces fonctions ne sont pas déterminées par les formules précédentes, à savoir lorsque la différence $n+\frac{1}{2}-a$, qu'elle soit positive ou négative, est d'un ordre inférieur à celui de α.

Tandis que jusqu'ici nous avons sommé toutes nos séries avec une exactitude telle que les grandeurs d'un ordre inférieur à l'unité ont seules été négligées, nous nous bornerons, dans ce qui suit, à considérer les termes de l'ordre le plus élevé. Cela posé, quand $n+\frac{1}{2}-a$ sera d'un ordre inférieur à α, on pourra dans la détermination de r_n rejeter toutes les grandeurs du même ordre que l'unité, puisque r_n sera une grandeur d'un ordre plus élevé. Par conséquent, si nous considérons la limite choisie $(2n+1)h$ comme une grandeur de l'ordre de a^0, toute l'intégrale (91) pourra être négligée, les deux fonctions qui y entrent, le sinus et J_0, ne pouvant, pour aucune valeur de la variable, devenir numériquement plus grandes que 1. En outre, la seconde partie de l'intégrale, déterminée par (92), se réduira à

$$\sqrt{\frac{a}{(2n+1)\pi}}\int_{(2n+1)h}^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} dy \frac{\sin\left(\left(1-\frac{a}{n+\frac{1}{2}}\right)y+\frac{ay^3}{24(n+\frac{1}{2})^3}-\cdots+\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{y-\frac{y^3}{24(n+\frac{1}{2})^2}+\cdots}}, \quad (94)$$

où la limite inférieure peut encore être remplacée par 0, puisque l'intégration de 0 à $(2n+1)h$ ne peut non plus conduire à un résultat d'un ordre plus élevé que l'unité, tandis que la limite supérieure de x, après la substitution de $ay^3 = 24(n+\frac{1}{2})^3x$, peut comme auparavant être désignée par ω. On obtient ainsi, en négligeant tous les termes qui ne conduisent qu'à des résultats d'un ordre inférieur,

$$2r_n(a) = \frac{a^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{5}{6}}\sqrt{\pi}}\int_0^{\omega} dx\, x^{-\frac{5}{6}} \sin\left((n+\tfrac{1}{2}-a)\left(\frac{24}{a}\right)^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}+x+\frac{\pi}{4}\right). \quad (95)$$

En développant suivant les puissances de $n+\frac{1}{2}-a$ et en intégrant à l'aide de l'équation (39), on trouve alors

$$2r_n(a) = \frac{a^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{5}{6}}\sqrt{\pi}}\left[\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)\sin\frac{\pi}{3}+\Gamma\left(\frac{3}{6}\right)\sin\frac{3\pi}{3}\cdot\left(n+\frac{1}{2}-a\right)\left(\frac{24}{a}\right)^{\frac{1}{3}}\frac{1}{1}\right.$$
$$\left.+\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)\sin\frac{5\pi}{3}\cdot\left(n+\frac{1}{2}-a\right)^2\left(\frac{24}{a}\right)^{\frac{2}{3}}\frac{1}{1\cdot 2}+\ldots\right], \quad (96)$$

série dans laquelle les 2e, 5e, 8e, ... termes sont égaux à 0.

Pose-t-on, par exemple, $a = n+\frac{1}{2}$, il vient

$$+\tfrac{1}{2}) = c(n+\tfrac{1}{2})^{\frac{1}{3}}, \quad c = \frac{\Gamma(\frac{1}{6})}{3^{\frac{5}{6}}\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 1{,}08874, \quad \log c = 0{,}0369226. \quad (97)$$

En substituant dans $r_n = v_n w_n$ les développements (23) et (25) de v_n et w_n, j'ai calculé le tableau ci-dessous, qui déjà pour les plus petites valeurs de n, montre un accord surprenant entre les véritables valeurs de $r_n(n+\frac{1}{2})$ et celles qui ont été calculées par les formules (97):

n	=	0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,
$(n+\frac{1}{2})$	=	0,8415,	1,2416,	1,4756,	1,6518,	1,7967,	1,9212,	2,0314,
$n+\frac{1}{2})^{\frac{1}{3}}$	=	0,8641,	1,2463,	1,4776,	1,6530,	1,7975,	1,9218,	2,0319.

Il est à remarquer que lorsque $n+\frac{1}{2}-a$ sera d'un ordre supérieur à celui de $a^{\frac{1}{3}}$, l'ordre de grandeur des termes ira en croissant. Mais dans cette supposition, l'intégrale (94), par la substitution de $\left(1-\frac{a}{n+\frac{1}{2}}\right)y = x$, sera réduite à

$$_n = \sqrt{\frac{a}{(2n+1-2a)\pi}}\int_0^{\omega}\frac{dx}{\sqrt{x}}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{a}{\sqrt{2a(n+\frac{1}{2}-a)}}, \quad (98)$$

valeur qui montre que nous pouvons de nouveau revenir à la formule plus simple (89) de r_n, cette formule conduisant au même résultat, lorsqu'on ne tient compte que des termes de l'ordre le plus élevé. Avec cette exactitude plus limitée, elle continue donc à être appli-

cable tant que la différence $n+\frac{1}{2}-a$ est d'un ordre plus élevé que celui de $a^{\frac{1}{3}}$. Lorsque cette différence n'est pas d'un ordre inférieur à celui de a, $r_n(a)$ n'est jamais d'un ordre supérieur que celui de l'unité. En effet, si elle est positive, cela résulte de l'équation (89), et si elle est négative, on arrive au même résultat en exprimant, dans l'équation $r_n = v_n w_n$, v_n et w_n par les équations (23) et

* NOTE 38. (25).* Par contre, si la différence $n+\frac{1}{2}-a$ est d'un ordre moins élevé que celui de a, $r_n(a)$ peut être d'un ordre plus élevé que celui de l'unité, et d'après (96), cette fonction atteindra finalement par la variation de n sa plus haute valeur pour $n+\frac{1}{2} = a$.

* NOTE 39. Dans le développement (66)* de q_n, le terme général, lorsque $n+\frac{1}{2}-a$ est d'un ordre moins élevé que celui de a, pourra être déterminé par

$$\frac{(n-m+1)(n-m+2)\dots(n+m)}{a^{2m}}\cdot\frac{1\cdot3\dots(2m-1)}{2\cdot4\dots2m} = \frac{e^{-2m}(n+\frac{1}{2}+m)^{n+\frac{1}{2}+m}}{\sqrt{\pi m}\,a^{2m}(n+\frac{1}{2}-m)^{n+\frac{1}{2}-m}}$$

En remplaçant la sommation par une intégration, on obtiendra

$$q_n(a) = \int_0^n \frac{dm}{\sqrt{\pi m}}e^{F(m)},\ F_m = -2m+m\log\frac{(n+\frac{1}{2})^2-m^2}{a^2}+(n+\frac{1}{2})\log\frac{n+\frac{1}{2}+m}{n+\frac{1}{2}-m}$$

ou en développant suivant les puissances de m

$$F(m) = -2m\log\frac{a}{n+\frac{1}{2}}-2\left(\frac{m^3}{(n+\frac{1}{2})^2}\cdot\frac{1}{2\cdot3}+\frac{m^5}{(n+\frac{1}{2})^4}\cdot\frac{1}{4\cdot5}+\dots\right).$$

Si l'on pose ensuite $m^3 = 3(n+\frac{1}{2})^2x$, l'intégrale pourra,

* NOTE 40. avec l'exactitude requise ici, être réduite à*

$$q_n(a) = \frac{(n+\frac{1}{2})^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{5}{6}}\sqrt{\pi}}\int_0^\infty dx\,x^{-\frac{5}{6}}e^{-(24)^{\frac{1}{3}}(n+\frac{1}{2})^{\frac{2}{3}}\log\frac{a}{n+\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{1}{3}}-x}.$$

On pourra également ici avec une exactitude suffisante poser $\log\frac{a}{n+\frac{1}{2}}=\frac{a-n-\frac{1}{2}}{n+\frac{1}{2}}$ après quoi l'intégration conduit au résultat

$$q_n(a)=\frac{(n+\frac{1}{2})^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{5}{6}}\sqrt{\pi}}\left[\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)+\Gamma\left(\frac{3}{6}\right)\left(n+\frac{1}{2}-a\right)\left(\frac{24}{n+\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}\frac{1}{1}\right.$$
$$\left.+\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)\left(n+\frac{1}{2}-a\right)^2\left(\frac{24}{n+\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}\frac{1}{1\cdot 2}+\ldots\right]. \quad (99)$$

Si, dans cette expression, on pose $a=n+\frac{1}{2}$, on trouve avec la même signification de c que plus haut

$$q_n(n+\tfrac{1}{2})=\frac{2}{\sqrt{3}}c(n+\tfrac{1}{2})^{\frac{1}{3}},\quad \log\frac{2}{\sqrt{3}}c=0{,}0993920. \quad (100)$$

On constate également ici, déjà pour les plus petites valeurs de n, un bon accord avec les valeurs exactes de $q_n(n+\frac{1}{2})$ calculées directement par la série (66); c'est ce que montre le tableau suivant:

n =	0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,
$q_n(n+\frac{1}{2})$ =	1,0000,	1,4444,	1,7104,	1,9121,	2,0783,	2,2215,	2,3482,
$\frac{2c}{\sqrt{3}}(n+\frac{1}{2})^{\frac{1}{3}}$ =	0,9978,	1,4391,	1,7062,	1,9087,	2,0755,	2,2191,	2,3462.

Par analogie avec r_n, q_n pourra être exprimé avec la même exactitude limitée par l'équation (67), tant que la différence $a-(n+\frac{1}{2})$ est d'un ordre plus élevé que celui de $a^{\frac{1}{3}}$; mais, en opposition avec r_n, q_n a une valeur toujours croissante quand n croît.

Au moyen des valeurs ainsi trouvées pour r_n et q_n, on peut calculer aussi bien λ_n et μ_n que v_n et w_n. A l'aide des équations $2r_n=2v_nw_n=q_n\sin 2\lambda_n$, on trouve $\sin 2\lambda_n(n+\frac{1}{2})=\sin\frac{\pi}{3}$, d'où résultent pour $\lambda_n(n+\frac{1}{2})$ les valeurs $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{4\pi}{3}$ ...; mais en déterminant $\lambda_n(n+\frac{1}{2})$ par les équations $v_n=\sqrt{q_n}\sin\lambda_n$, $w_n=\sqrt{q_n}\cos\lambda_n$ pour $n=0, 1, 2, 3, \ldots$, on trouve respectivement

$$\lambda_n(n+\tfrac{1}{2})=0{,}5,\quad 0{,}5165,^*\quad 0{,}5203,\quad 0{,}5215,\quad \ldots$$ * NOTE 41

Cette série converge évidemment vers la plus petite des valeurs ci-dessus indiquées, c'est-à-dire vers

$$\lambda_n(n+\tfrac{1}{2}) = \frac{\pi}{6} = 0{,}5236, \qquad (101)$$

d'où résulte encore à l'aide des équations $v_n^2 = r_n e^{2\mu_n} = q_n \sin^2 \lambda_n$,

$$\mu_n(n+\tfrac{1}{2}) = -\tfrac{1}{4}\log 3. \qquad (102)$$

Comme on a $\lambda_n'(a) = \dfrac{1}{q_n(a)}$ et $\mu_n'(a) = \dfrac{1}{2 r_n(a)}$, les développements en série de $\lambda_n(a)$ et de $\mu_n(a)$, en désignant pour abréger $q_n(n+\frac{1}{2})$, $r_n(n+\frac{1}{2})$, $q_n'(n+\frac{1}{2})$, etc., par q, r, q', ..., deviendront maintenant

$$\lambda_n(a) = \frac{\pi}{6} + \frac{1}{q}\,\frac{a-n-\frac{1}{2}}{1} - \frac{q'}{q^2}\,\frac{(a-n-\frac{1}{2})^2}{1\cdot 2} + \ldots, \qquad (103)$$

$$\mu_n(a) = -\frac{1}{4}\log 3 + \frac{1}{2r}\,\frac{a-n-\frac{1}{2}}{1} - \frac{r'}{2r^2}\,\frac{(a-n-\frac{1}{2})^2}{1\cdot 2} + \ldots, \qquad (104)$$

où q', r' et les coefficients plus élevés de $q_n(a)$ et de $r_n(a)$ par rapport à a devront, pour $a = n+\frac{1}{2}$, être calculés à l'aide des équations (99) et (96). On trouve ainsi $q' = -\dfrac{2}{\sqrt{3}}$, $r' = \dfrac{r}{3(n+\frac{1}{2})}$; cette dernière valeur est seulement de l'ordre de $a^{-\frac{2}{3}}$ et doit par conséquent être regardée comme nulle.

Les fonctions v_n et w_n peuvent être déterminées par les équations $(v_n \pm w_n)^2 = q_n \pm 2 r_n$, les signes de v_n et de w_n, qui ici sont indéterminés, étant déterminés par $v_n = \sqrt{q_n} \sin \lambda_n$ et $w_n = \sqrt{q_n} \cos \lambda_n$, où $\sqrt{q_n}$ est positif. Les développements en série que j'ai trouvés par cette voie à l'aide des séries (96) et (99), où, en dehors de la différence $n+\frac{1}{2}-a$, les deux quantités $n+\frac{1}{2}$ et a peuvent être considérées comme égales, sont les suivants:

$$(a) = C\left(\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\cos\frac{\pi}{6} + \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\cos\frac{5\pi}{6}\cdot\frac{\varepsilon}{1} + \Gamma\left(\frac{3}{3}\right)\cos\frac{9\pi}{6}\cdot\frac{\varepsilon^2}{1\cdot 2} + \ldots\right), \quad (105)$$

$$(a) = C\left(\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\left(1+\sin\frac{\pi}{6}\right) + \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\left(1+\sin\frac{5\pi}{6}\right)\frac{\varepsilon}{1} + \Gamma\left(\frac{3}{3}\right)\left(1+\sin\frac{9\pi}{6}\right)\frac{\varepsilon^2}{1\cdot 2} + \ldots\right), \quad (106)$$

où

$$C = \left(\frac{a}{6}\right)^{\frac{1}{3}}\frac{1}{\sqrt{3}\,\pi}, \quad \varepsilon = \left(\frac{6}{a}\right)^{\frac{1}{3}}\left(n+\frac{1}{2}-a\right).$$

Ces séries peuvent aussi être facilement ramenées aux intégrales définies

$$v_n(a) = C\int_0^\infty dx\, x^{-\frac{2}{3}}\cos(\varepsilon x^{\frac{1}{3}} + x), \quad (107)$$

$$w_n(a) = C\left[\int_0^\infty dx\, x^{-\frac{2}{3}} e^{\varepsilon x^{\frac{1}{3}} - x} + \int_0^\infty dx\, x^{-\frac{2}{3}}\sin(\varepsilon x^{\frac{1}{3}} + x)\right]. \quad (108)$$

En introduisant les séries (105) et (106) dans $(v_n \pm w_n)^2 = q_n \pm 2r_n$, on pourra sans difficulté se convaincre de l'exactitude de ces développements.* Pour l'usage de ce calcul, je mentionnerai ici les équations * NOTE 42.

$$\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)^2 = 2^{\frac{1}{3}}\sqrt{\frac{\pi}{3}}\,\Gamma\left(\frac{1}{6}\right), \quad \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) = 2\sqrt{\frac{\pi}{3}}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right),$$

$$\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)^2 = 2^{\frac{2}{3}}\sqrt{\frac{\pi}{3}}\,\Gamma\left(\frac{5}{6}\right).$$

Nous pouvons maintenant poursuivre le calcul interrompu dans le chapitre précédent, et considérer d'abord le cas où la sphère a un indice de réfraction plus petit que le milieu environnant. Nous supposons donc $N < 1$, d'où il suit que l'équation $\alpha \sin\theta = \alpha' \sin\theta'$ devient impossible pour $\sin\theta > N$.

Posons maintenant dans les équations (33) et (34) $v_n(\alpha') = \sqrt{r_n(\alpha')}\, e^{i t_n(\alpha')}$, tandis que $v_n(\alpha)$ et $w_n(\alpha)$ seront

comme auparavant exprimés par $q_n(\alpha)$ et $\lambda_n(\alpha)$, et comme q'_n peut être négligé en comparaison de q_n, de même r'_n pourra aussi l'être en comparaison de r_n. En déterminant

* NOTE 43. $q_n(\alpha)$ par (67) et $r_n(\alpha')$ par (89), on obtiendra *

$$2k_n = -1 + e^{2\lambda_n(\alpha)i}\frac{q_n(\alpha) - 2r_n(\alpha')Ni}{q_n(\alpha) + 2r_n(\alpha')Ni}$$

$$= -1 + e^{2\lambda_n(\alpha)i}\frac{\sqrt{(n+\frac{1}{2})^2 - \alpha'^2} - \sqrt{\alpha^2 - (n+\frac{1}{2})^2}\,N^2 i}{\sqrt{(n+\frac{1}{2})^2 - \alpha'^2} + \sqrt{\alpha^2 - (n+\frac{1}{2})^2}\,N^2 i},$$

et si l'on pose

$$\frac{\sqrt{\alpha^2 - (n+\frac{1}{2})^2}}{\sqrt{(n+\frac{1}{2})^2 - \alpha'^2}}\,N^2 = \operatorname{tg}\delta,$$

cette expression prendra la forme plus simple

$$2k_n = -1 + e^{2(\lambda_n(\alpha) - \delta)i}.$$

On obtient de la même manière

$$2s_n = -1 + e^{2(\lambda_n(\alpha) - \Delta)i}, \quad \operatorname{tg}\Delta = \frac{\sqrt{\alpha^2 - (n+\frac{1}{2})^2}}{\sqrt{(n+\frac{1}{2})^2 - \alpha'^2}}.$$

Le cas où l'on a seulement $2k_n = -1$, $2s_n = -1$ a déjà été traité dans le chapitre précédent (p. 447). On y supposait d'une manière générale que les fonctions q_n et λ_n devaient, pour toutes les variables, pouvoir s'exprimer par les formules (67) et (68); mais il est à remarquer que, dans le cas particulier dont il s'agit, où k_n et s_n ne renferment pas les variables α et α', nous avons seulement affaire aux fonctions $q_n(\alpha)$ et $\lambda_n(\alpha)$, et pour qu'elles puissent être exprimées par (67) et (68), il suffit qu'on ait $\nu + \frac{1}{2} = a \sin\vartheta < a$. Les résultats trouvés sont donc valables jusqu'à une distance a de l'axe principal, et, comme on se le rappelle, le mouvement de la lumière ainsi représenté en dehors de la

sphère comprenait la lumière incidente dans l'espace du côté négatif du plan des yz et une obscurité complète sur le côté positif du même plan.

Si l'on suppose ensuite que

$$2k_n = e^{2(\lambda_n(\alpha)-\delta)i}, \quad 2s_n = e^{2(\lambda_n(\alpha)-\Delta)i},$$

et si l'on pose comme à l'ordinaire $n = \nu + z$, on remarquera que le développement, suivant les puissances de z, de $\lambda_{\nu+z}(\alpha)$ donne aux différentes puissances de z des coefficients d'un ordre plus élevé que celui qu'on obtient par le développement correspondant de δ et de Δ*. En exposant $\nu+\frac{1}{2} = \alpha \sin\theta$, δ et Δ pourront donc être exprimés par les valeurs constantes * NOTE

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{\cos\theta}{\sqrt{\sin^2\theta - N^2}} N^2, \quad \operatorname{tg}\Delta = \frac{\cos\theta}{\sqrt{\sin^2\theta - N^2}}.$$

Les expressions de k_n et de s_n correspondent maintenant entièrement au cas déjà traité (p. 457), où nous avons déterminé la réflexion par la surface extérieure de la sphère. La différence consiste seulement en ceci que les facteurs b_ν et c_ν sont devenus égaux à -1, et que la phase est diminuée dans K de 2δ et dans S de 2Δ, et les résultats déjà trouvés pourront donc avec ces changements encore servir ici.

Les cas limite $\sin\theta = N$ ne constitue pas une exception spéciale, puisque δ et Δ, lorsque θ décroît jusqu'à cette limite, deviennent égaux à $\frac{\pi}{2}$ et les facteurs $e^{-2\delta i}$ et $e^{-2\Delta i}$ à -1, et que par là K et S prennent les mêmes valeurs que celles qui résulteraient des formules précédentes si θ croissait jusqu'à la même limite.

Les coefficients k'_n et s'_n sont déterminés par

$$k'_n = e^{\lambda_n(a)i - \mu_n(a')i} \frac{2N\sqrt{q_n(a)\,r_n(a')}}{q_n(a) + 2r_n(a')Ni},$$

$$s'_n = e^{\lambda_n(a)i - \mu_n(a')i} \frac{2N\sqrt{q_n(a)\,r_n(a')}}{Nq_n(a) + 2r_n(a')i}.$$

Comme, pour un point intérieur, $n > a'$ doit en même temps aussi correspondre à $n > a'$, il faut dans les séries K' et S' (79) poser $\sqrt{q_n(a')}\sin\lambda_n(a') = \sqrt{r_n(a')}\,e^{\mu_n(a')}$. On voit donc que ces séries renfermeront le facteur $e^{\mu_n(a') - \mu_n(a')}$, qui, si a' et a' ne sont pas très près d'être égaux, sera une quantité extrêmement petite. Cela résulte de l'expression donnée dans (93) pour μ_n, qui, si la variable n'est pas très voisine de n, est une quantité négative très grande et d'autant plus grande que la variable est plus petite. Le mouvement de la lumière en dedans de la partie de la sphère qui produit une réflexion totale n'est sensible que dans une couche mince immédiatement au-dessous de la surface de la sphère.

Si l'on pose $a' = a' - Nh$, h étant supposé très petit, on aura

$$\mu_n(a') - \mu_n(a') = \frac{Nh}{2r_n(a')} = \frac{h}{a}\sqrt{(n + \tfrac{1}{2})^2 - a'^2}.$$

On trouvera ensuite comme à l'ordinaire

$$K' = \frac{2N\cos\phi}{a\sqrt{1 - N^2}\,\mathrm{tg}\,\theta\sqrt{\sin^2\theta - N^2\cos^2\theta}}\, e^{\left(kt + a\cos\theta + \frac{\pi}{2} - d\right)i - h\sqrt{\sin^2\theta - N^2}},$$

$$S' = -i\frac{2\sin\phi}{a\sqrt{1 - N^2}\,\mathrm{tg}\,\theta}\, e^{\left(kt + a\cos\theta + \frac{\pi}{2} - d\right)i - h\sqrt{\sin^2\theta - N^2}},$$

et $\varphi + \theta = \pi$. Dans la détermination des composantes $\bar{\xi}'$, $\bar{\eta}'$, $\bar{\zeta}'$, il faut revenir aux équations (18), et comme K' et S' renferment originairement le facteur $e^{\mu_n(a')}$, on

aura, en négligeant les termes d'un ordre inférieur,

$$\frac{\partial K'}{\partial a'} = \frac{\partial \mu_n(a')}{\partial a'} K' = \frac{\sqrt{(n+\frac{1}{2})^2 - a'^2}}{a'} K' = \frac{\sqrt{\sin^2\theta - N^2}}{N} K'.$$

On obtient en même temps

$$\frac{\partial K'}{\partial \varphi'} = (n+\tfrac{1}{2}) K' i = a \sin\theta K' i,$$

et les mêmes équations restent applicables en y remplaçant K' par S'. Les équations (18) donnent ainsi dans ce cas

$$\bar{\xi}' = \frac{\sin^2\theta}{N} a K', \quad \bar{\eta}' = i \frac{\sin\theta \sqrt{\sin^2\theta - N^2}}{N} a K', \quad \bar{\zeta}' = -i \sin\theta \, a S',$$

où l'on peut substituer les valeurs trouvées pour K' et pour S'.

On voit que les résultats de ce calcul de la réflexion totale s'accordent, tant pour les points extérieurs que pour les points intérieurs, avec ce qui est connu par la théorie de la réflexion totale par des surfaces planes, et le calcul ne conduit donc pas au delà de ce qui peut aussi être trouvé par la voie élémentaire.

Il reste seulement encore à continuer les sommations des séries K et S (79) à partir de la limite de n à laquelle les équations (67) et (68) cessent d'être valables pour la variable a*. Dans tous les cas, la valeur de k_n donnée dans (33) pourra être transformée en * NOTE 45.

$$k_n = -1 + A e^{2\lambda_n(a) i}, \quad A = \frac{q_n(a)(1 + r'_n(a')) - N(i + \frac{1}{2} q'_n(a)) 2 r_n(a')}{q_n(a)(1 + r'_n(a)) - N(-i + \frac{1}{2} q'_n(a)) 2 r_n(a')}.$$

La fraction désignée par A, lorsque n dépasse la limite dont il s'agit, devient égale à 1, N étant supposé différent de 1. Nous n'examinerons pas le cas où $N-1$

est assez petit pour que la différence doive être considérée comme une grandeur d'un ordre plus petit que l'unité.

L'équation $A = 1$ aura en effet toujours lieu, si $q'_n(a)$ est d'un ordre plus élevé que l'unité, ce qui, suivant (99), est le cas lorsque $n - a$ est positif et d'un ordre
* NOTE 46. plus élevé que celui de $a^{\frac{1}{3}}$. En outre, n est si grand* dans la somme considérée que $q_n(a)$ est d'un ordre supérieur à l'unité, tandis que $r_n(a')$ et $r'_n(a')$, lorsque la différence $n-a$, tant positive que négative, est d'un ordre moins élevé que celui de a, ne peuvent être d'un ordre supérieur à l'unité. Cela résulte de ce qui a été dit plus haut (p. 478), car on a $n - a' = n - a - (N - 1)a$, où le dernier terme ne peut être d'un ordre plus petit que celui de a. Il en résulte donc que, dans le cas considéré, on doit toujours avoir $A = 1$, et comme les mêmes considérations peuvent s'appliquer à la valeur de s_n donnée dans (33), on aura

$$2k_n = -1 + e^{2\lambda_n(a)i}, \quad 2s_n = 1 + e^{2\lambda_n(a)i}.$$

Ces deux coefficients, pour $n > a$, n allant en croissant,
* NOTE 47. convergent rapidement vers 0*.

En nous référant à ce qui précède pour le cas de $2k_n = -1$, $2s_n = -1$, nous aurons à considérer la série

$$Q = \frac{aK}{\cos\psi} - \frac{iaS}{\sin\psi}$$

$$= -\sum_{n_1}^{n_2} \sqrt{\frac{2q_n(a)}{\pi n \sin\varphi}} \sin\left((n + \tfrac{1}{2})\varphi - \frac{\pi}{4}\right) e^{\left(kt - \frac{n\pi}{2} + 2\lambda_n(a) - \lambda_n(a)\right)i},$$

où n_2 est la limite supérieure de n, en deçà de laquelle $q_n(a)$ et $\lambda_n(a)$ se laissent déterminer par (67) et (68).

L'exposant dans cette somme est

$$\left(kt-\frac{n\pi}{2}+2\,\lambda_n(a)-\lambda_n(a)\pm\left((n+\tfrac{1}{2})\varphi-\frac{\pi}{4}\right)\right)i,$$

t en y posant $n=\nu+z$ et $\nu+\frac{1}{2}=a\sin\vartheta$, le coefficient de z en négligeant les grandeurs d'un ordre inférieur à l'unité, sera égal à $-\vartheta\pm\varphi$. Par conséquent, 'il doit être nul ou très petit, on devra prendre le signe upérieur et $\varphi-\vartheta$ sera nul ou très petit*. Il en résulte que les composantes du mouvement vibratoire pourront, l'après (80), être déterminées par * NOTE 48.

$$\overline{\xi_e}=\sin^2\varphi\cos\psi\,Q,$$
$$\overline{\eta_e}=\sin\varphi\cos\varphi\cos\psi\,Q,\quad \overline{\zeta_e}=-\sin\varphi\sin\psi\,Q,$$

l'où l'on obtient pour les composantes par rapport aux axes fixes

$$\xi_e=0,\quad \eta_e=\sin\varphi\,Q,\quad \zeta_e=0.$$

Comme $\varphi-\vartheta$ est très petit et que, par suite, on peut ailleurs que dans l'exposant poser $q_n(a)=\dfrac{1}{\cos\vartheta}=\dfrac{1}{\cos\varphi}$ et $n=a\sin\vartheta=a\sin\varphi$, la quantité $\sin\varphi\,Q$ se laisse réduire à

$$\sin\varphi\,Q=\eta e=\frac{i}{\sqrt{2\pi a}\cos\varphi}\sum_{n_2}^{n_8}e^{F_n i},$$

$$F_n=kt-\frac{n\pi}{2}+2\,\lambda_n(a)-\lambda_n(a)+(n+\tfrac{1}{2})\varphi-\frac{\pi}{4},$$

expressions qui représentent sous une forme simple le phénomène complexe qui comprend la diffraction de rayons parallèles par une sphère réfléchissante.

Si nous considérons d'abord la partie de la somme où $n>a$, on voit que $\lambda_n(a)$, pour des valeurs croissantes

de n, décroît de $\frac{\pi}{6}$ jusqu'à 0. On en obtient une détermination plus exacte par les équations

$$e^{2\lambda_n(\alpha)i} = \frac{1+\operatorname{tg}\lambda_n(\alpha)i}{1-\operatorname{tg}\lambda_n(\alpha)i} = \frac{1+e^{2\mu_n(\alpha)}i}{1-e^{2\mu_n(\alpha)}i} = 1+2\sum_0^\infty e^{2m\mu_n(\alpha)}i^m,$$

où $\mu_n(\alpha)$, pour $n=\alpha$, a pour valeur $-\frac{1}{4}\log 3$ et décroît rapidement pour des valeurs croissantes de n.

Si donc on pose d'abord dans la somme considérée $e^{2\lambda_n(\alpha)i}=1$, puis dans l'exposant, comme à l'ordinaire, $n=\nu+z$, $\nu+\frac{1}{2}=a\sin\vartheta$, le coefficient de zi, dans l'exposant développé suivant les puissances de z, deviendra $\varphi-\vartheta$. La somme, pour $\varphi=\vartheta$, sera ainsi remplacée par l'intégrale

$$\int_{\alpha-a\sin\vartheta}^{n_s-a\sin\vartheta} dz\, e^{\left(kt-a\cos\varphi-\frac{\pi}{4}-\frac{z^2}{2a\cos\varphi}\right)i} = -i\sqrt{2\pi a\cos\varphi}\,\eta_e,$$

qui, par la substitution

$$z=\left(x-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sqrt{2a\cos\varphi},\quad \frac{\varepsilon}{2}=\frac{a\sin\varphi-\alpha}{\sqrt{2a\cos\varphi}},$$

donne

$$\eta_e=\frac{i}{\sqrt{\pi}}e^{\left(kt-a\cos\varphi-\frac{\pi+\varepsilon^2}{4}\right)i}\int_0^\omega dx\, e^{(\varepsilon x-x^2)i},$$

intégrale qui correspond à l'intégrale (57) lorsqu'on change le signe de i. Il résulte du calcul de cette dernière intégrale que pour $\varepsilon>0$, c'est-à-dire quand le point est situé en dehors du bord de l'ombre géométrique de la sphère ($a\sin\varphi>\alpha$), l'intégrale est une fonction périodique. En dedans du bord de l'ombre ($\varepsilon<0$), elle est au contraire apériodique. Au bord même de l'ombre ($\varepsilon=0$), on trouve

$$\eta_e=\tfrac{1}{2}e^{(kt-a\cos\varphi)i}.$$

Le résultat est, sous tous les rapports, le même que celui qu'on obtient pour la diffraction de la lumière par un disque plan circulaire placé, au lieu de la sphère, dans le grand cercle auquel les rayons incidents sont tangents.

La seconde partie de la somme considérée plus haut est

$$2\sum_{m=0}^{m=\infty}\sum_{\alpha}^{n_8} e^{\left(kt-\lambda_n(a)+(n+\frac{1}{2})\varphi-(2n-2m+1)\frac{\pi}{4}\right)i+2m\,\mu_n(a)}.$$

Si l'on y pose $n = \nu + z$, $\nu + \frac{1}{2} = \alpha = a \sin\vartheta$ et qu'on se serve pour $\mu_n(a)$ du développement (104), le coefficient de z dans l'exposant deviendra, par le développement suivant les puissances de z, $(\varphi-\vartheta)\,i - \frac{m}{r}$, où $r = r_\nu(\nu+\frac{1}{2})$ est déterminé par (97) et est de l'ordre de $a^{\frac{1}{3}}$.

Si $\varphi - \vartheta$ est d'un ordre plus élevé que $a^{-\frac{1}{3}}$, la somme considérée, en ne prenant que les grandeurs de l'ordre le plus élevé, pourra être exprimée par

$$\sum_{m=0}^{m=\infty}\frac{1}{\varphi-\vartheta}\,e^{\left(kt-a\cos\vartheta+a(\varphi-\vartheta)+(2m+1)\frac{\pi}{4}\right)i-\frac{m}{2}\log 3}\;*,$$ * NOT

qui est d'un ordre moins élevé que $a^{\frac{1}{3}}$.

Par contre, si le point considéré est assez voisin du bord géométrique de l'ombre de la sphère pour que $\varphi - \vartheta$ soit du même ordre ou d'un ordre moins élevé que $a^{-\frac{1}{3}}$, on aura à tenir compte de tous les termes du développement de l'exposant suivant les puissances de z; mais par la substitution $z = rx$, ils deviendront tous de l'ordre de a^0 et l'intégrale entière sera du même ordre que r, par conséquent de l'ordre de $a^{\frac{1}{3}}$*. L'amplitude correspondante pourra être exprimée par * NOT

$$C\frac{a^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{a\cos\varphi}},$$

où C est une constante numérique. Un calcul plus exact de cette constante ne présente guère d'intérêt, car on voit facilement que cette partie du mouvement de la lumière ne peut être que très minime et à peine observable, puisqu'elle se confond avec le reste de la lumière diffractée. La formule montre que l'intensité de cette lumière est proportionnelle à la puissance $\frac{2}{3}$ du rayon de la sphère et à la puissance $\frac{1}{3}$ de la longueur d'onde, et inversement proportionnelle à la distance du point considéré au grand cercle auquel les rayons incidents sont tangents, supposé toutefois que cette dernière distance elle-même ne devienne pas très petite.

Enfin, l'amplitude vibratoire correspondant à $n < a$ est aussi déterminée par

$$\eta_e = \frac{i}{\sqrt{2\pi a\cos\varphi}}\sum_{n_1}^{a} e^{F_n i},$$

sommation dans laquelle $\lambda_n(a)$, pour des valeurs croissantes de n, décroît d'une grande valeur indéterminée jusqu'à $\frac{\pi}{6}$. En posant $n = \nu - z$, $\nu + \frac{1}{2}a = a\sin\vartheta$, on obtient

$$\eta_e = \frac{i}{\sqrt{2\pi a\cos\varphi}}\int_0^\omega dz\, e^{\left(kt - a\cos\vartheta + a(\varphi-\vartheta) + 2\lambda_{\nu-z}(a) - \frac{\pi}{4} - (\varphi-\vartheta)z\right)}$$

où $\lambda_{\nu-z}(a)$ peut être développé suivant (103). On voit maintenant que ce cas correspond entièrement à celui qui a été traité plus haut, et que le résultat peut être présenté sous la même forme. Cette partie du mouvement de la lumière correspond à la diffraction des rayons totalement réfléchis sous une incidence rasante. L'in-

tensité de ces derniers rayons décroît à mesure que l'angle d'incidence croît; cependant, à cause de la diffraction, cette intensité n'est pas nulle au bord géométrique de l'ombre, mais devient une grandeur de la même espèce que l'intensité des rayons diffractés considérés plus haut, après quoi elle décroît rapidement en dedans du bord de l'ombre.

Les sommations par rapport à n n'ont encore été faites que jusqu'à la limite supérieure $n = n_8$; mais, comme nous l'avons déjà fait observer, les coefficients k_n et s_n, pour $n > \alpha$ et pour des valeurs croissantes de n, convergeront rapidement vers 0. Cette partie des sommes sera donc en général une quantité extrêmement petite.

7. *Quantité de lumière émise. α très petit. Système de petites sphères.*

Toute la lumière émanée de la sphère éclairée est supposée recueillie sur le côté intérieur d'une surface sphérique concentrique placée à une distance infinie de la sphère. En désignant par L la quantité totale de lumière recueillie, par r le rayon infini de la sphère et par I l'intensité de la lumière à la distance r, mesurée par le carré de l'amplitude, L pourra être défini et déterminé par

$$L = r^2 \int_0^{\pi} \sin\varphi \, d\varphi \int_0^{2\pi} d\psi \, I. \tag{109}$$

D'après les équations (17) et (31), les composantes du mouvement vibratoire, pour $a = \frac{2\pi r}{\lambda}$ et r infiniment grand, peuvent être exprimées par

$$\bar{\xi}_e = 0, \quad \bar{\eta}_e = -\frac{i\cos\psi}{a} e^{(kt-a)i} \sum_1^\infty \frac{2n+1}{n(n+1)}\left(k_n \frac{d^2P_n}{d\varphi^2} + s_n \frac{dP_n}{\sin\varphi\, d\varphi}\right)$$

$$\bar{\zeta}_e = \frac{i\sin\psi}{a} e^{(kt-a)i} \sum_1^\infty \frac{2n+1}{n(n+1)}\left(k_n \frac{dP_n}{\sin\varphi\, d\varphi} + s_n \frac{d^2P_n}{d\varphi^2}\right)$$

où k_n et s_n sont des grandeurs complexes, dont nous désignerons le module par $\bar{k}_n$ et $\bar{s}_n$. Si maintenant on détermine I par la somme des carrés des amplitudes de ces composantes, l'équation (109), après qu'on aura fait l'intégration par rapport à ψ, donnera

$$L = \frac{\lambda^2}{4\pi}\int_0^\pi \sin\varphi\, d\varphi \left[\left(\sum_1^\infty \frac{2n+1}{n(n+1)}\left(\bar{k}_n \frac{d^2P_n}{d\varphi^2} + \bar{s}_n \frac{dP_n}{\sin\varphi\, d\varphi}\right)\right)^2 + \left(\sum_1^\infty \frac{2n+1}{n(n+1)}\left(\bar{k}_n \frac{dP_n}{\sin\varphi\, d\varphi} + \bar{s}_n \frac{d^2P_n}{d\varphi^2}\right)\right)^2\right].$$

Chacun de ces carrés peut aussi être exprimé comme un produit de deux sommes avec les variables n et m, et en remarquant que l'on a

$$\int_0^\pi \sin\varphi\, d\varphi \left(\frac{d^2P_n}{d\varphi^2}\frac{d^2P_m}{d\varphi^2} + \frac{1}{\sin^2\varphi}\frac{dP_n}{d\varphi}\frac{dP_m}{d\varphi}\right) = \begin{cases} 0 \text{ quand } m \gtrless n \\ \dfrac{2n^2(n+1)^2}{2n+1} \text{ quand } m \end{cases}$$

* NOTE 51. $$\int_0^\pi d\varphi \left(\frac{d^2P_n}{d\varphi^2}\frac{dP_m}{d\varphi} + \frac{dP_n}{d\varphi}\frac{d^2P_m}{d\varphi^2}\right) = 0\,*,$$

on trouvera que la quantité de lumière L est déterminée par

$$L = \frac{\lambda^2}{2\pi}\sum_1^\infty (2n+1)(\bar{k}_n^2 + \bar{s}_n^2). \qquad (110)$$

Les expressions générales (33) des coefficients k_n et s_n peuvent aussi être mises sous la forme

$$k_n = -\frac{1}{1+p_n i}, \quad p_n = \frac{w_n(\alpha)v'_n(\alpha')-Nw'_n(\alpha)v_n(\alpha')}{v_n(\alpha)v'_n(\alpha')-Nv'_n(\alpha)v_n(\alpha')}, \tag{111}$$

$$s_n = -\frac{1}{1+q_n i}, \quad q_n = \frac{Nw_n(\alpha)v'_n(\alpha')-w'_n(\alpha)v_n(\alpha')}{Nv_n(\alpha)v'_n(\alpha')-v'_n(\alpha)v_n(\alpha')}. \tag{112}$$

Le module de ces coefficients est donc moindre que 1, excepté dans les cas où l'on a $p_n = 0$, ou $q_n = 0$, valeurs auxquelles correspondent respectivement $k_n = -1$ et $s_n = -1$.

Nous déterminerons maintenant le mouvement de la lumière dans le cas où le diamètre de la sphère éclairée est très petit en comparaison de la longueur d'onde de la lumière incidente, de sorte que α devra être considéré comme un nombre assez petit pour que, dans les développements suivant les puissances de α, on ne doive prendre en général que le terme qui renferme la plus petite puissance de α. Par contre, nous ne ferons provisoirement, relativement à α', aucune supposition restrictive*. * NOTE 52.

D'après les développements en série (22) et (24), on aura, en ne prenant que le premier terme des séries,

$$v_n(\alpha) = \frac{\alpha^{n+1}}{1\cdot 3\ldots 2n+1}, \quad v'_n(\alpha) = \frac{(n+1)\alpha^n}{1\cdot 3\ldots 2n+1},$$

$$w_n(\alpha) = \frac{1\cdot 3\ldots 2n-1}{\alpha^n}, \quad w'_n(\alpha) = -n\frac{1\cdot 3\ldots 2n-1}{\alpha^{n+1}}.$$

En substituant ces valeurs dans (111) et (112), on verra que k_n et s_n deviennent en général des grandeurs très petites de l'ordre de α^{2n+1}. On trouvera en effet

$$p_n = \frac{1^2\cdot 3^2\ldots(2n-1)^2(2n+1)}{\alpha^{2n+1}}\cdot\frac{\alpha' v'_n(\alpha')+N^2 n v_n(\alpha')}{\alpha' v'_n(\alpha)-N^2(n+1)v_n(\alpha')},$$

$$q_n = \frac{1^2\cdot 3^2\ldots(2n-1)^2(2n+1)}{\alpha^{2n+1}}\cdot\frac{\alpha' v'_n(\alpha')+n v_n(\alpha')}{\alpha' v'_n(\alpha')-(n+1)v_n(\alpha')};$$

dans la dernière expression, on peut aussi poser

$$a' v'_n(a') + n v_n(a') = a' v_{n-1}(a'),$$
$$a' v'_n(a') - (n+1) v_n(a') = - a' v_{n+1}(a').$$

Par conséquent, abstraction faite des cas particuliers, les développements (31) de K et de S se réduiront au premier terme, correspondant à $n = 1$, terme où entrent

$$k_1 = i\frac{a^3}{3}\frac{a' v'_1(a') - 2N^2 v_1(a')}{a' v'_1(a') + N^2 v_1(a')}, \quad s_1 = -i\frac{a^3}{3}\frac{v_2(a')}{v_0(a')};$$

après quoi les composantes du mouvement vibratoire $\bar{\xi}_e$, $\bar{\eta}_e$, $\bar{\zeta}_e$ se laissent facilement déterminer à l'aide des équations (17).

Si maintenant a' est, de même que a, une grandeur très petite, k_1 pourra se réduire à la forme

$$k_1 = -i\frac{2a^3}{3}\cdot\frac{N^2-1}{N^2+2},$$

tandis que, pour a' très petit ou si a' est une racine de l'équation $v_2(a') = 0$, on obtient $s_1 = 0$.

Dans ce dernier cas, $\bar{\eta}_e$, d'après les équations (17), sera toujours proportionnel à $\cos\varphi$, d'où il suit que les vibrations de la lumière réfléchie perpendiculairement aux rayons incidents seront dirigées perpendiculairement au plan d'incidence, et que, par conséquent, la lumière sera entièrement polarisée dans ce plan. Il va sans dire que cela aura lieu aussi si la lumière incidente n'est pas polarisée.

Les données restant les mêmes, la même loi doit également être applicable si, au lieu d'une sphère isolée, nous nous représentons un assemblage de sphères semblables, séparées les unes des autres et disposées sans aucun ordre. Si nous posons en outre, dans l'expression de k_1, $a = \frac{2\pi R}{\lambda}$, R étant le rayon de la sphère, on voit

que le mouvement de la lumière en un point arbitraire hors de la sphère, abstraction faite de la lumière incidente et des coordonnées du point, dépend seulement de la grandeur $\frac{N^2-1}{N^2+2}R^3$. Maintenant, dans le système de sphères ci-dessus mentionné, concevons que, la situation de leurs centres restant la même, leurs rayons croissent jusqu'à R_1, qui cependant doit toujours être très petit en comparaison d'une longueur d'onde, tandis que leur indice de réfraction passe de N à N_1; si ce changement s'opère de manière qu'on ait toujours

$$\frac{N^2-1}{N^2+2}R^3 = \frac{N_1^2-1}{N_1^2+2}R_1^3,$$

le mouvement de la lumière, en dehors des sphères et partout en dehors du système, ne sera pas influencé par ce changement. Si R_1 devient égal à la plus petite demi-distance moyenne des centres des sphères, le système correspondra à très peu près à un milieu homogène avec l'indice de réfraction N_1. De là on peut encore conclure que si les sphères, dans le système, restent les mêmes tandis que la densité d_1 de ce dernier varie, l'indice de réfraction N_1 du système variera de manière que $\frac{N_1^2-1}{N_1^2+2}\frac{1}{d_1}$ restera constant (cf. „Théorie de la dispersion").

La quantité totale de lumière émise par une sphère isolée sera, d'après (110), déterminée par

$$L = \frac{2\lambda^2 a^6}{3\pi}\left(\frac{N^2-1}{N^2+2}\right)^2,$$

et A désignant le nombre de sphères dans l'unité de volume, AL sera la quantité totale de lumière rayonnée par chaque unité de volume du système*. Cette grandeur est * NOTE 53.

le coefficient d'absorption du système, et si on la désigne par h, α étant en même temps exprimé par $\frac{2\pi R}{\lambda}$, on aura

$$h = AL = A\frac{128\pi^5 R^6}{3\lambda^4}\left(\frac{N^2-1}{N^2+2}\right)^2, \quad A = \frac{3}{4\pi R_1^3}.$$

Il en résulte que le coefficient d'absorption est inversement proportionnel à la quatrième puissance de la longueur d'onde (loi de Rayleigh*). Réciproquement, le coefficient d'absorption h du système et son indice de réfraction N_1 étant donnés, on pourra, avec nos données, déduire le nombre de sphères par unité de volume et une limite inférieure de leur grandeur, car on tire des équations précédentes

$$A = \frac{24\pi^3}{h\lambda^4}\left(\frac{N_1^2-1}{N_1^2+2}\right)^2, \quad R^3 = \frac{h\lambda^4}{32\pi^4}\frac{(N_1^2+2)(N^2+2)}{(N_1^2-1)(N^2-1)} > \frac{h\lambda^3}{32\pi^4}\cdot\frac{N_1^2 \ldots}{N_1^2 \ldots}$$

Comme exemple, nous prendrons l'indice de réfraction et le coefficient d'absorption de l'air atmosphérique à la pression ordinaire, à savoir $N_1 = 1{,}00029$ et $\lambda h^4 = 0{,}0017$, $10^{-6\,\mathrm{mm}}$ étant pris pour unité de longueur. Avec ce dernier coefficient, 11,8 % de lumière avec la longueur d'onde 580 et deux fois plus avec $\lambda = 480$ seront absorbés sur une étendue de 8 kilomètres.

Ces valeurs, étant substituées dans les équations précédentes, donnent

$$A = 0{,}0163, \quad R = 0{,}141\left(\frac{N^2+2}{N^2-1}\right)^{\frac{1}{3}} > 0{,}141,$$

c'est-à-dire par millimètre cube un nombre de $0{,}0163\cdot 10^{18}$ sphères avec un rayon d'au moins $0{,}141\cdot 10^{-6\,\mathrm{mm}}$. A ces

* J. W. Strutt: Phil. Mag. 41, février, avril, juin 1871.

valeurs correspond $\alpha = 0{,}00153$ pour $\lambda = 580$ et $\alpha = 0{,}00185$ pour $\lambda = 480$.

Très différent de ce mouvement de la lumière est celui qui se produit dans les cas particuliers où l'on a $p_n = 0$ ou $q_n = 0$, lesquels se présentent pour toute une série de longueurs d'onde. A ces cas correspondent, d'après les équations (111) et (112),

$$w_n(\alpha)\,v'_n(\alpha') - N w'_n(\alpha)\,v_n(\alpha') = 0,$$
$$N w_n(\alpha)\,v'_n(\alpha') - w'_n(\alpha)\,v_n(\alpha') = 0.$$

La première de ces équations correspond approximativement à $v_n(\alpha') = 0$, la seconde à $v_{n-1}(\alpha') = 0$*. En posant pour plus d'exactitude dans la première équation $\alpha' = \beta + \varepsilon$, β étant une racine de l'équation $v_n(\beta) = 0$, on obtient par un développement suivant les puissances de ε et en négligeant les termes qui renferment une puissance de ε plus grande que la première, * NOTE 54.

$$\varepsilon = \frac{w_n(\alpha)}{N w'_n(\alpha)} = -\frac{\alpha}{Nn}.$$

Si l'équation donnée est $q_{n+1} = 0$, à cette équation correspondra, si l'on prend les deux premiers termes du développement de $w_{n+1}(\alpha)$ et de $w'_{n+1}(\alpha)$,

$$\left(1 + \frac{\alpha^2}{2(2n+1)}\right) v'_{n+1}(\alpha') + \left(n + 1 + \frac{(n-1)\,\alpha^2}{2(2n+1)}\right) v_{n+1}(\alpha') = 0,$$

où l'on a
$$v_{n+1}(\alpha') = -v'_n(\alpha') + \frac{n+1}{\alpha'} v_n(\alpha')$$
et
$$v'_{n+1}(\alpha') = -\left(\frac{(n+1)^2}{\alpha'^2} - 1\right) v_n(\alpha') + \frac{n+1}{\alpha'} v'_n(\alpha').$$

A l'aide de ces équations, on trouve avec le degré d'approximation voulu

$$(2n+1)\,\alpha' v_n(\alpha') + \alpha^2 v'_n(\alpha') = 0.$$

Si maintenant on pose $\alpha' = \beta + \varepsilon'$, $v_n(\beta)$ étant, comme auparavant, égal à 0, on obtient

$$\varepsilon' = -\frac{\alpha^2}{(2n+1)\alpha'} = -\frac{\alpha}{N(2n+1)}.$$

Les racines de $p_n = 0$ et de $q_{n+1} = 0$ sont donc très près d'être égales, mais sans l'être exactement, et la différence entre deux racines correspondantes est

$$\varepsilon' - \varepsilon = \frac{\alpha(n+1)}{Nn(2n+1)} \quad (n > 0).$$

En désignant les variations correspondantes de la longueur d'onde par δ et δ', on a

$$\frac{\varepsilon}{\beta} = -\frac{\delta}{\lambda}, \quad \frac{\varepsilon'}{\beta} = -\frac{\delta'}{\lambda}$$

et

$$\delta - \delta' = \frac{\lambda\alpha(n+1)}{\beta Nn(2n+1)} = \frac{\pi^2}{\beta^2}\cdot\frac{4R^2}{\lambda}\cdot\frac{n+1}{n(2n+1)}.$$

Le tableau suivant donne les cinq plus grandes valeurs de $\frac{\pi}{\beta}$ pour $n = 0, 1, 2, 3$, β étant une racine de l'équation $v_n(\beta) = 0$:

$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	
1	0,6992	0,5451	0,4496	...
0,5000	0,4067	0,3454	0,3016	...
0,3333	0,2881	0,2549	0,2293	...
0,2500	0,2233	0,2025	0,1856	...
0,2000	0,1823	0,1681	0,1561	...
⋮	⋮	⋮	⋮	

On voit maintenant que la plus grande différence $\delta - \delta'$ dans la longueur d'onde correspond à $\frac{\pi}{\beta} = 0{,}6992$ et à $n = 1$. En prenant pour exemple $R = 0{,}141$ et

$\lambda = 580$, on trouve $\delta - \delta' = 0{,}000045$, nombre 13000 fois plus petit que la différence (0,6) entre les longueurs d'onde des deux raies D_1 et D_2 du spectre solaire.

Dans un système de sphères, il se produit, dans les cas particuliers considérés ici, des raies d'absorption lorsque la lumière blanche transmise est décomposée en un spectre. En effet, tandis que la quantité de lumière rayonnée de chaque sphère est en général, comme nous l'avons vu, une grandeur très petite proportionnelle à R^6, elle devient, pour $p_n = 0$ ou $q_n = 0$, égale à $\frac{\lambda^2(2n+1)}{2\pi}$, c'est-à-dire aussi grande que la quantité de lumière incidente qui, sans déviation, tomberait sur une sphère dont le rayon serait $\frac{\lambda\sqrt{n+\frac{1}{2}}}{\pi}$. Comme, dans notre système, les distances moyennes des sphères voisines sont supposées beaucoup plus petites, on voit que le système peut être regardé comme à peu près impénétrable à cette espèce de rayons. On remarquera en même temps que les raies d'absorption correspondant à $q_1 = 0$, c'est-à-dire à $v_0(\beta) = 0$, sont simples et toutes les autres doubles.

Si l'on a déterminé dans un système une série de longueurs d'onde de raies d'absorption, elles pourront être rapportées aux inverses des racines de l'équation $v_n(\beta) = 0$, où $n = 0, 1, 2, \ldots$, en les multipliant par un même facteur constant. Ce facteur étant égal à $\frac{N}{2\pi R}$, il sera donc possible, à l'aide de ce facteur, de l'indice de réfraction et du coefficient d'absorption du système, de déterminer toutes les constantes de ce système, à savoir le nombre de sphères par unité de volume, leur grandeur et leur indice de réfraction.

On pourra aussi dans ce but employer des mesures de la largeur des raies dont le calcul peut se faire comme il suit.

Si la longueur d'onde λ correspond à $p_n = 0$, la valeur de p_n, pour une longueur d'onde voisine $\lambda + \delta$, sera déterminée par*

* NOTE 55.

$$p_n = -\left[\frac{dp_n}{da} + \frac{dp_n}{da'} N\right]^{p=0} \cdot \frac{\alpha\delta}{\lambda} = \frac{1^2 \cdot 3^2 \ldots (2n-1)^2}{\alpha^{2n+1}} \cdot \frac{N^2-1}{N^2} (nN^2 + n(n+1)) \frac{\delta}{\lambda}.$$

De même, si λ correspond à $q_n = 0$, la valeur de q_n, pour une longueur d'onde $\lambda + \delta$, sera déterminée par

$$q_n = \frac{1^2 \cdot 3^2 \ldots (2n-1)^2}{\alpha^{2n-1}} (N^2 - 1) \frac{\delta}{\lambda}.$$

Bien que δ soit considérée comme une petite grandeur, elle pourra cependant toujours être supposée assez grande pour que p_n et q_n soient très grands par rapport à l'unité, de sorte que k_n et s_n pourront être déterminés par

$$k_n = \frac{i}{p_n}, \quad s_n = \frac{i}{q_n}.$$

Pour un système de sphères, les coefficients d'absorption correspondants seront exprimés par

$$\frac{A}{p_n^2} \cdot \frac{\lambda^2(2n+1)}{2\pi} \quad \text{et} \quad \frac{A}{q_n^2} \cdot \frac{\lambda^2(2n+1)}{2\pi}.$$

Nous pouvons maintenant, dans le spectre de la lumière transmise, considérer les deux limites d'une raie d'absorption comme les points où l'intensité de la lumière est réduite à une fraction constante e^{-c}, et la largeur de la raie pourra alors être déterminée par la différence 2δ entre les longueurs d'onde en ces deux

points. En désignant par x la distance parcourue par un rayon du système considéré, on aura

$$c = \frac{Ax}{p_n^2} \cdot \frac{\lambda^2(2n+1)}{2\pi} \quad \text{et} \quad c = \frac{Ax}{q_n^2} \cdot \frac{\lambda^2(2n+1)}{2\pi}.$$

En substituant dans ces expressions les valeurs de p_n et de q_n trouvées plus haut, on voit que la largeur des raies est toujours proportionnelle à la racine carrée du chemin parcourru, comme aussi à la racine carrée du nombre de sphères par unité de volume.

La raie la plus large correspond à

$$\alpha' = \pi, \quad q_1 = \frac{\alpha'^2 - \alpha^2}{\alpha^3} \cdot \frac{\delta}{\lambda},$$

ce qui donne

$$2\delta = \frac{8R^3}{\lambda} \sqrt{\frac{6\pi Ax}{c}}.$$

Pour $A = 0{,}0163$, $R = 0{,}141$, $\lambda = 580$, $x = 10^1$ ou 10 mètres et $c = 0{,}693$, correspondant à une absorption de 50 % aux bords de la raie, on trouve

$$2\delta = 2{,}57,$$

valeur qui correspond à une largeur 4,3 fois plus grande que la distance entre les deux raies D_1 et D_2 du spectre solaire. Il n'est pas sans intérêt de remarquer que 2δ peut aussi être calculé directement au moyen du coefficient général d'absorption h, sans qu'il soit besoin de connaître les autres constantes du système, N pouvant, dans l'expression de h, être considéré comme un très grand nombre.

Les raies d'absorption peuvent ainsi être très larges et présenter plutôt le caractère de bandes d'absorption, lorsque α' est une des plus petites racines de l'équation

$v_0(\alpha') = 0$. Mais, si α' est une des racines des équations $v_1(\alpha')$, $v_2(\alpha') = 0$, les raies, avec les constantes numériques prises ici pour exemples, seront, même dans les cas les plus favorables, réduites à des lignes d'une largeur à peine mesurable, ce qui, bien entendu, n'empêche pas qu'elles ne puissent être visibles.

Mon intention, en calculant le mouvement de la lumière dans un système de petites sphères, n'a pas été d'en donner une détermination exacte, ce qui eût exigé un plus grand appareil mathématique. J'ai seulement cherché à mettre en evidence ce que présente de particulier ce mouvement de la lumière, qui, pour une sphère isolée, se laisse déterminer exactement et, par là, devient aussi calculable dans ses parties essentielles pour un assemblage de sphères, le but de ce travail ayant été, en partie, de montrer la possibilité d'arriver, par les propriétés optiques du système, à la connaissance des éléments qui, par leur petitesse même, échappent à l'observation directe, en partie d'appeler l'attention sur la frappante analogie qui se manifeste entre les propriétés optiques du système et celles des gaz.

NOTES.

NOTE 1. La traduction de ce mémoire a été faite par feu M. Frisch et approuvée par Lorenz lui-même.

NOTE 2. Les dérivées partielles par rapport aux autres coordonnées polaires sont au contraire toujours finies.

NOTE 3. φ désigne l'angle que fait r avec l'axe des x, ψ l'angle que fait le plan qui passe par r et x avec le plan des xy.

NOTE 4. On a

$$r\overline{\xi} = x\xi + y\eta + z\zeta,$$
$$\Delta_2(r\overline{\xi}) = x\Delta_2\xi + y\Delta_2\eta + z\Delta_2\zeta + 2\theta.$$

NOTE 5. Le symbole $\Delta_2 u$ peut être exprimé en coordonnées polaires par

$$\Delta_2 u = \frac{1}{r}\frac{\partial^2(ru)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} + \frac{\cot\varphi}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\varphi} + \frac{1}{r^2\sin^2\varphi}\frac{\partial^2 u}{\partial\psi^2},$$

et comme les dérivées par rapport à φ et ψ sont partout finies, l'expression

$$\frac{\partial^2(r^2\overline{\xi})}{\partial r^2} - \frac{\partial(r^2\theta)}{\partial r}$$

sera par conséquent aussi finie.

De la même manière on reconnaît que les expressions suivantes sont partout finies.

NOTE 6. l est défini comme le coefficient de x dans l'expression $e^{(kt-lx)i}$; mais Lorenz se sert en général de la lettre l pour désigner la quantité $\frac{2\pi}{\lambda}$, où λ est la longueur d'onde.

NOTE 7. On suppose dans ce qui suit que ξ, η, ζ sont de la forme φe^{kit}, où φ est fonction de x, y, z, mais non de t. Dans cette hypothèse les équations différentielles prendront la forme

$$\Delta_2\xi - \frac{\partial\theta}{\partial x} + l^2\xi = 0,$$

$$\Delta_2\eta - \frac{\partial\theta}{\partial y} + l^2\eta = 0,$$

$$\Delta_2\zeta - \frac{\partial\theta}{\partial z} + l^2\zeta = 0.$$

Comme θ est nul, on voit facilement qu'on peut écrire

$$\xi_e = \frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z}, \quad \eta_e = \frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial x}, \quad \zeta_e = \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}.$$

Si l'on introduit ces quantités dans les équations (1), celles-ci prendront la forme

$$\frac{\partial(\Delta_2 C + l^2 C)}{\partial y} - \frac{\partial(\Delta_2 B + l^2 B)}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial(\Delta_2 A + l^2 A)}{\partial z} - \frac{\partial(\Delta_2 C + l^2 C)}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial(\Delta_2 B + l^2 B)}{\partial x} - \frac{\partial(\Delta_2 A + l^2 A)}{\partial y} = 0.$$

On satisfait à ces équations de la manière la plus générale en posant

$$\Delta_2 A + l^2 A = \frac{\partial u}{\partial x},$$

$$\Delta_2 B + l^2 B = \frac{\partial u}{\partial y},$$

$$\Delta_2 C + l^2 C = \frac{\partial u}{\partial z},$$

u étant une fonction arbitraire.

Mais, en posant

$$A = z\frac{\partial Q}{\partial y} - y\frac{\partial Q}{\partial z} + xS,$$

on aura en vertu des équations (10)

$$\Delta_2 A + l^2 A = 2\frac{\partial S}{\partial x},$$

et de la même manière

$$\Delta_2 B + l^2 B = 2\frac{\partial S}{\partial y},$$

$$\Delta_2 C + l^2 C = 2\frac{\partial S}{\partial z}.$$

Les équations (1) sont donc satisfaites par les valeurs de A, B et C données par les équations (9). Reste encore à décider si ces solutions des équations (1) sont les plus générales. Mais on peut remarquer que ξ, η, ζ sont tous trois solutions de la même équation aux dérivées partielles, et qu'ils sont liés en outre par l'équation

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0,$$

par quoi l'on reconnaît qu'ils peuvent être exprimés par deux intégrales de l'équation $\Delta_2 u + l^2 u = 0$, et que A, B, C étant exprimés par deux intégrales, indépendantes

l'une de l'autre, de cette équation, les expressions ξ, η, ζ sont vraisemblablement les solutions les plus générales des équations (1).

NOTE 8. On trouvera

$$\xi = \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial\left(x\frac{\partial Q}{\partial x} + y\frac{\partial Q}{\partial y} + z\frac{\partial Q}{\partial z}\right)}{\partial x} - x\Delta_2 Q + z\frac{\partial S}{\partial y} - y\frac{\partial S}{\partial z}$$

$$= \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial\left(r\frac{\partial Q}{\partial r}\right)}{\partial x} - x\Delta_2 Q + z\frac{\partial S}{\partial y} - y\frac{\partial S}{\partial z},$$

et la composante de la rotation sera

$$p_x = \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial z} = -z\frac{\partial(\Delta_2 Q)}{\partial y} + y\frac{\partial(\Delta_2 Q)}{\partial z} + \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial\left(x\frac{\partial S}{\partial x} + y\frac{\partial S}{\partial y} + z\frac{\partial S}{\partial z}\right)}{\partial x} - x\Delta_2 S$$

$$= -l^2\left(y\frac{\partial Q}{\partial z} - z\frac{\partial Q}{\partial y}\right) + \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial\left(r\frac{\partial S}{\partial r}\right)}{\partial x} - x\Delta_2 S.$$

En remarquant encore que

$$\Delta_2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\cot\varphi}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{1}{r^2\sin^2\varphi}\frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2}$$

$$= \frac{1}{r}\frac{\partial^2(ru)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2\sin\varphi}\frac{\partial\left(\sin\varphi\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)}{\partial \varphi} + \frac{1}{r^2\sin^2\varphi}\frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2},$$

on obtiendra facilement l'expression donnée dans le texte.

NOTE 9. Comme on a $l = \frac{2\pi}{\lambda}$, α, α', a, a' désignent des distances mesurées par les longueurs d'onde (divisées par 2π) comme unités.

NOTE 10. On déduit facilement au moyen de l'équation différentielle (21) que

$$v_{n+1} = -a^{n+2} \frac{d \dfrac{v_n}{a^{n+1}}}{da},$$

t comme $v_0 = \sin a$, on en conclut les relations (23).
e la même manière on obtient les expressions (25), en
emarquant que

$$w_{n+1} = -a^{n+2} \frac{d \dfrac{w_n}{a_{n+1}}}{da}$$

t que $w_0 = \cos a$.

NOTE 11. On reconnaît facilement que, u_n étant
intégrale générale de l'équation

$$\frac{d^2 u_n}{da^2} = \left(\frac{n(n+1)}{a^2} - 1\right) u_n,$$

ı fonction

$$u = \frac{\cos \psi}{a} \frac{d P_n(\cos\varphi)}{d\varphi} u_n(a)$$

atisfait à l'équation

$$u = \frac{1}{r}\frac{\partial^2 (ru)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin\varphi}\frac{\partial\left(\sin\varphi \dfrac{\partial u}{\partial \varphi}\right)}{\partial\varphi} + \frac{1}{r^2\sin^2\varphi}\frac{\partial^2 u}{\partial\psi^2} + l^2 u$$

$$= l^2\left(\frac{1}{a}\frac{\partial^2(au)}{\partial a^2} + \frac{1}{a^2\sin^2\varphi}\frac{\partial\left(\sin\varphi\dfrac{\partial u}{\partial\varphi}\right)}{\partial\varphi} + \frac{1}{a^2\sin^2\varphi}\frac{\partial^2 u}{\partial\psi^2} + u\right) = 0,$$

t par suite que les expressions (29) satisfont aux équa-
ions

$$\Delta_2 K + l^2 K = 0,$$
$$\Delta_2 S + l^2 S = 0;$$

nais il est bien possible que ces expressions ne soient
as les solutions les plus générales des deux équations
ui peuvent (par un choix convenable des constantes)
atisfaire à toutes les conditions aux limites.

NOTE 12. Les équations (32) ne peuvent pas directement être déduites des équations de condition.

Celles-ci donneront

$$(1)\quad \frac{\partial\left(\frac{\partial\cdot a(K+K_0)}{a\,\partial a}\right)}{\partial\varphi}+\frac{\partial(S+S_0)}{\sin\varphi\,\partial\psi}=\frac{\partial\left(\frac{\partial(a'K')}{a'\,\partial a'}\right)}{\partial\varphi}+\frac{\partial S'}{\sin\varphi\,\partial\psi},$$

$$(2)\quad \frac{\partial\left(\frac{\partial\cdot a(K+K_0)}{a\,\partial a}\right)}{\sin\varphi\,\partial\psi}-\frac{\partial(S+S_0)}{\partial\varphi}=\frac{\partial\left(\frac{\partial(a'K')}{a'\,\partial a'}\right)}{\sin\varphi\,\partial\psi}-\frac{\partial S'}{\partial\varphi},$$

$$(3)\quad \frac{\partial\left(\frac{\partial\cdot a(S+S_0)}{\partial a}\right)}{\sin\varphi\,\partial\psi}-\frac{\partial\cdot a(K+K_0)}{\partial\varphi}=\frac{\partial\left(\frac{\partial(a'S')}{\partial a'}\right)}{\sin\varphi\,\partial\psi}-\frac{\partial(a'K')}{\partial\varphi},$$

$$(4)\quad \frac{\partial\left(\frac{\partial\cdot a(S+S_0)}{\partial a}\right)}{\partial\varphi}+\frac{\partial\cdot a(K+K_0)}{\sin\varphi\,\partial\psi}=\frac{\partial\left(\frac{\partial(a'S')}{\partial a'}\right)}{\partial\varphi}+\frac{\partial(a'K')}{\sin\varphi\,\partial\psi}.$$

En vertu des équations (26), (29), (30), on aura

$$K=\cos\psi\sum_1^\infty K_n\frac{dP_n(\cos\varphi)}{d\varphi},$$

$$S=\sin\psi\sum_1^\infty S_n\frac{dP_n(\cos\varphi)}{d\varphi},$$

et les expressions analogues pour K_0, S_0, K', S', les coefficients K_n et S_n étant indépendants de φ et ψ.

Si l'on pose

$$\frac{1}{a}\frac{d(aK_n)}{da}+\frac{1}{a}\frac{d(aK_{0,n})}{da}-\frac{1}{a'}\frac{d(a'K'_n)}{da'}=(K_n)$$

et

$$S_n+S_{0,n}-S'_n=(S_n),$$

où $K_{0,n}$, K'_n, S_n, $S_{0,n}$, S'_n sont les coefficients analogues à K_n et S_n correspondants à K_0, K', S, S_0, S', les équations (1) et (2) peuvent s'écrire

$$(5)\qquad \sum_{1}^{\infty}(K_n)\frac{d^2P_n}{d\varphi^2}+\sum_{1}^{\infty}\frac{(S_n)}{\sin\varphi}\frac{dP_n}{d\varphi}=0,$$

$$(6)\qquad \sum_{1}^{\infty}\frac{(K_n)}{\sin\varphi}\frac{dP_n}{d\varphi}+\sum_{1}^{\infty}(S_n)\frac{d^2P_n}{d\varphi^2}=0.$$

Si l'on pose $\cos\varphi = x$, on aura

$$\frac{dP_n}{d\varphi}=-\sin\varphi\frac{dP_n}{dx}$$

et

$$\frac{d^2P_n}{d\varphi^2}=-x\frac{dP_n}{dx}+(1-x^2)\frac{d^2P_n}{dx^2}=x\frac{dP_n}{dx}-n(n+1)P_n,$$

et l'équation (5), en vertu de la relation

$$x\frac{dP_n}{dx}=nP_n+\frac{dP_{n-1}}{dx},$$

peut s'écrire

$$\sum_{1}^{\infty}(K_n)\left(\frac{dP_{n-1}}{dx}-n^2P_n\right)-\sum_{1}^{\infty}(S_n)\frac{dP_n}{dx}=0.$$

Par intégration entre les limites -1 et x, on obtiendra

$$\sum_{1}^{\infty}(K_n)\left(P_{n-1}-\frac{n^2}{2n+1}(P_{n+1}-P_{n-1})\right)-\sum_{1}^{\infty}(S_n)P_n$$
$$+\sum_{1}^{\infty}((-1)^n(K_n)+(-1)^n(S_n))=0.$$

Comme le coefficient de P_n doit être nul, on en déduit

$$(7)\qquad \frac{(n+2)^2}{2n+3}(K_{n+1})-\frac{(n-1)^2}{2n-1}(K_{n-1})-(S_n)=0,$$

relation valable pour

$$n = 1, 2, \ldots, \infty,$$

et

(8) $$\tfrac{1}{3}(K_1) + \sum_2^\infty (-1)^n (K_n) + \sum_1^\infty (-1)^n (S_n) = 0.$$

Par intégration entre les limites x et 1, on aur obtenu le terme constant

(9) $$-\tfrac{1}{3}(K_1) + \sum_2^\infty (K_n) - \sum_1^\infty (S_n) = 0.$$

De même l'équation (6) donnera

(10) $$\frac{(n+2)^2}{2n+3}(S_{n+1}) - (S_{n-1})\frac{(n-1)^2}{2n-1} - (K_n) = 0,$$

(11) $$\tfrac{1}{3}(S_1) + \sum_2^\infty (-1)^n (S_n) + \sum_1^\infty (-1)^n (K_n) = 0,$$

(12) $$-\tfrac{1}{3}(S_1) + \sum_2^\infty (S_n) - \sum_1^\infty (K_1) = 0.$$

Des équations (8) et (11) on déduit

$$(K_1) - (S_1) = 0,$$

et des équations (9) et (12)

$$(K_1) + (S_1) = 0,$$

et par conséquent

$$(K_1) = 0, \quad (S_1) = 0.$$

Si dans les équations (7) et (10) on fait $n = 1$, c obtiendra

$$(K_2) = 0, \quad (S_2) = 0,$$

et l'on reconnaîtra que toutes les quantités (K_n) et (S s'évanouissent, par où l'on voit qu'on aura

$$S_0 + S = S' \quad \text{et} \quad \frac{1}{a}\frac{\partial \cdot a(K_0 + K)}{\partial a} = \frac{1}{a'}\frac{\partial (a'K')}{\partial a'}.$$

Par un procédé analogue on pourra déduire la pre-
ière et la quatrième équation (32) des équations (3)
(4).

Du reste on voit qu'on peut se passer des équa-
ons (32), les équations $(K_1) = 0$, $(S_1) = 0$, etc., don-
int immédiatement les quatre équations d'où sont
éduites les équations (33).

NOTE 13. v_n et w_n étant deux intégrales de l'équa-
on

$$\frac{d^2u}{da^2} = \left(\frac{n(n+1)}{a^2} - 1\right)u,$$

ı aura

$$v''_n w_n - v_n w''_n = 0$$

$$v'_n w_n - w'_n v_n = c,$$

étant une constante. Si l'on pose $a = \infty$, on obtiendra

$$w_n = \cos\left(a - \frac{n\pi}{2}\right) = v'_n,$$

$$v_n = -w'_n = \sin\left(a - \frac{n\pi}{2}\right),$$

: par conséquent

$$c = 1.$$

NOTE 14. Les expressions trouvées par Lorenz pour
xprimer la moyenne de différentes fonctions ne peu-
ent être considérées que comme approximativement
xactes et ne peuvent pas être démontrées avec rigueur,
e qu'on voit déjà par la définition des quantités ω.

Quant à la valeur de $\int_\omega^\infty e^{xi} x^{\mu-1}\,dx$, cette fonction peut,
omme le dit Lorenz, si $0 < \mu < 1$, être développée en une
érie semi-convergente, à savoir

$$\int_{\omega}^{\infty} e^{xi} x^{\mu-1} dx = e^{\omega i}(i\omega^{\mu-1} - (\mu-1)\,\omega^{\mu-2} - i(\mu-1)(\mu-2)\,\omega^{\mu-3}\ldots)$$
$$+ i^{n-1}(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-n+1)\int_{\omega}^{\infty} e^{\omega i} x^{\mu-n} dx.$$

Si ω est suffisamment grand, et que n ne le soit pas trop en comparaison de ω, la dernière intégrale peut être considérée comme négligeable. Considérons la valeur moyenne de $e^{\omega i}\omega^{-\mu}$, où μ est positif. Cette valeur est exprimée par

$$M = \frac{\int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{\omega i}\,\omega^{-\mu} d\omega}{\omega_2 - \omega_1},$$

où ω_1 et ω_2 sont tous deux des nombres très grands. Si l'on considère dans l'intégrale deux éléments pour lesquels ω diffère de π, la somme de ces deux élements sera

$$e^{\omega i}(\omega^{-\mu} - (\omega+\pi)^{-\mu})\,d\omega = \frac{\pi e^{\omega i}\mu}{\omega^{\mu+1}}\,d\omega$$

(approximativement). On voit qu'on peut dans l'expression de M considérer les limites de l'intégrale comme des multiples entiers de 2π, si $\omega_2 - \omega_1$ est suffisamment grand.

Mais alors on aura, si $\omega_1 = 2m_1\pi$, $\omega_2 = 2m_2\pi$,

$$M = \frac{\int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{\omega i}\,\omega^{-\mu}\,d\omega}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{\int_{2m_1\pi}^{2m_2\pi} e^{\omega i}\,\omega^{-\mu}\,d\omega}{\omega_2 - \omega_1}$$

$$= \frac{\pi\mu\int_0^{\pi}((2m_1\pi+h)^{-\mu-1} + (2(m_1+1)\pi+h)^{-\mu-1}\ldots(2(m_2-1)\pi+h)^{-\mu-1})\,e^{\cdot}}{\omega_2 - \omega_1}$$

Mais on obtiendra une valeur numériquement plus grande si l'on remplace e^{hi} par 1, et par conséquent

$$|M| < \left| \frac{\pi \sum_0^{m_2-m_1-1} \left(\frac{1}{(2(m_1+k)\pi)^\mu} - \frac{1}{((2(m_1+k)+1)\pi)^\mu} \right)}{\omega_2 - \omega_1} \right|,$$

et comme on augmente l'inégalité en remplaçant

$$\frac{-1}{((2(m_1+k)+1)\pi)^\mu} \quad \text{par} \quad \frac{-1}{(2(m_1+k+1)\pi)^\mu}$$

on aura

$$|M| < \frac{\pi\left(\frac{1}{\omega_1^\mu} - \frac{1}{\omega_2^\mu}\right)}{\omega_2 - \omega_1},$$

quantité qui tend vers zéro si $\omega_2 - \omega_1$ est suffisamment grand. On reconnaît alors que la moyenne de $\int_\omega^\infty e^{xi} x^{\mu-1} dx$ est zéro si $0 < \mu < 1$.

Si, dans l'intégrale $\int_0^\omega e^{xi} x^{\mu-1} dx$, μ est plus grand que 1, on aura

$$\int_0^\omega e^{xi} x^{\mu-1} dx = \frac{e^{\omega i} \omega^{\mu-1}}{i} - \frac{(\mu-1)}{i} \int_0^\omega e^{xi} x^{\mu-2} dx.$$

Lorenz dit bien que la moyenne de $e^{\omega i} \omega^{\mu-1}$ s'évanouit; mais cela n'est pas exact, car on aura, si l'on nomme cette moyenne M,

$$M = \frac{\int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{\omega i} \omega^{\mu-1} d\omega}{(\omega_2 - \omega_1)},$$

expression qui peut à l'aide d'intégrations par parties être développée en une série semi-convergente, dont les termes sont de la forme

$$\frac{c_p (e^{\omega_1 i} \omega_1^p - e^{\omega_2 i} \omega_2^p)}{\omega - \omega_2},$$

où c_p est une constante, et un reste de la forme $c\int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{xi} x^{\mu-1}\,dx$, qui peut être négligé. Mais les termes de la série et par suite la série elle-même ne s'évanouissent pas en général.

NOTE 15. Tant n_1 que n_2 sont ici des quantités de la même nature que ω.

NOTE 16. La formule (40) ne peut en général être juste; car on a

$$\sum_{n_1}^{n_2} e^{ani} = \frac{e^{an_1 i} - e^{a(n_2+1)i}}{1 - e^{ai}},$$

et par conséquent, en différentiant par rapport à a,

$$\sum_{n_1}^{n_2} n\, e^{ani} = \frac{n_1 e^{an_1 i} - (n_2+1)\, e^{a(n_2+1)i}}{1 - e^{ai}} + \frac{\left(e^{an_1 i} - e^{a(n_2+1)i}\right) e^{ai}}{(1 - e^{ai})^2}.$$

Si l'on prend la moyenne de $\sum_{n_1}^{n_2} n\, e^{ani}$, le second terme s'évanouira, mais non pas le premier. La somme de la série (ou bien la moyenne de cette somme) est pourtant d'un ordre de grandeur plus petit que celui de chaque terme de la série en particulier.

NOTE 17. Cela présuppose que $\frac{I\cdot(n_2-\nu)^3}{\alpha^2}$, $\frac{I\cdot(\nu-n_1)}{\alpha^2}$ sont tous deux des quantités très grandes.

NOTE 18. Voir la note 14.

NOTE 19. On a

$$\frac{d^2 Q}{d\varepsilon^2} = -\int_0^{\omega} \cos\left(-\varepsilon x^{\frac{1}{3}} + x\right) dx$$

et

$$Q = \int_0^\omega x^{-\frac{2}{3}} \cos(-\varepsilon x^{\frac{1}{3}} + x)\, dx$$

$$= \frac{3}{\varepsilon}\int_0^\omega \cos(-\varepsilon x^{\frac{1}{3}} + x)\cdot\left(\frac{\varepsilon}{3} x^{-\frac{2}{3}} - 1\right)\cdot dx$$

$$+ \frac{3}{\varepsilon}\int_0^\omega \cos(-\varepsilon x^{\frac{1}{3}} + x)\, dx$$

$$= -\frac{3}{\varepsilon}\Big| \sin(-\varepsilon x^{\frac{1}{3}} + x)\Big|_0^\omega - \frac{3}{\varepsilon}\frac{d^2Q}{dx^2}.$$

Mais d'après la définition des quantités ω le premier terme s'évanouit.

NOTE **20**. Cela suppose que $\frac{Gz_1^2}{\alpha}$ est très grand.

NOTE **21**. Cela suppose que $\sqrt{\frac{H}{\alpha^3}}\, z_1^3$ est très grand.

NOTE **22**. On a $G = \pm\mu\sqrt{\frac{2\pi H}{\alpha}}$ et le module du terme où entre $\alpha^{\frac{1}{2}}$ est égal à

$$\frac{A}{4}\sqrt{\frac{\alpha\pi}{H}}\sqrt{2(M_1^2 + N_1^2)}.$$

NOTE **23**. On trouve la somme des séries dans lesquelles entre $P_n(-\cos\varphi)$ en remplaçant dans les formules (26) et (27) φ par $\varphi + \pi$.

NOTE **24**. La série (66) peut être déduite de l'équation différentielle

$$\frac{d^2 q_n}{d\alpha^2} + 4\left(1 - \frac{n(n+1)}{\alpha^2}\right)\frac{dq_n}{d\alpha} + \frac{4n(n+1)}{\alpha^3} q_n = 0,$$

à laquelle satisfait q_n.

Pour la déduction de cette équation différentielle, voir la partie 6 de ce mémoire intitulée: Suite. Réflexion totale, diffraction.

NOTE **25**. La formule (66) peut s'écrire

$$q_n = 1 + \frac{(n+\frac{1}{2})^2 - (\frac{1}{2})^2}{a^2}\frac{1}{2} + \left(\frac{(n+\frac{1}{2})^2 - (\frac{1}{2})^2}{a^2}\right)\left(\frac{(n+\frac{1}{2})^2 - (\frac{3}{2})^2}{a^2}\right)\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}$$
$$+ \left(\frac{(n+\frac{1}{2})^2 - (\frac{1}{2})^2}{a^2}\right)\left(\frac{(n+\frac{1}{2})^2 - (\frac{3}{2})^2}{a^2}\right)\left(\frac{(n+\frac{1}{2})^2 - (\frac{5}{2})^2}{a^2}\right)\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6} + \cdots.$$

Si p est petit, les quantites

$$\left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{a}\right)^2, \quad \left(\frac{\left(\frac{3}{2}\right)}{a}\right)^2, \quad \ldots \quad \left(\frac{\left(\frac{2p+1}{2}\right)}{a}\right)^2$$

sont elles-mêmes petites et peuvent être négligées, et si p est grand, le terme de q_n correspondant à cet indice sera lui-même petit. Mais, si l'on peut négliger les quantités $\left(\frac{(\frac{1}{2})}{a}\right)^2$, $\left(\frac{(\frac{3}{2})}{a}\right)^2$, …, l'expression représentera précisément $\left(1 - \left(\frac{n+\frac{1}{2}}{a}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}}$.

NOTE **26**. On suppose dans ce qui suit que $q_n(\alpha)$ et $q_n(\alpha')$ peuvent être exprimées par la formule (67).

NOTE **27**. Les séries sont des progressions géométriques dont la raison est $b_n e^{-2i\lambda_n(\alpha')}$ ou $c_n e^{-2i\lambda_n(\alpha')}$.

Comme q_n est positif, les valeurs de b_n et de c_n sont toujours plus petites que l'unité.

NOTE **28**. Si l'on développe $b_{n,m}$ suivant les puissances croissantes de $\frac{n+\frac{1}{2}}{a}$, on trouvera que le coefficient de $\left(\frac{n+\frac{1}{2}}{a}\right)^2$ sera

$$\frac{(N-1)^m}{(N+1)^{m+2}}\left(N + \frac{1}{N} - 2(m+1)\right),$$

et d'une manière analogue que le coefficient de $\left(\frac{n+\frac{1}{2}}{a}\right)^2$ dans $c_{n,m}$ sera

$$-\frac{(1-N)^m}{(1+N)^{m+2}}\left(N+\frac{1}{N}-2(m+1)\right).$$

NOTE **29**. L'exposant de e dans l'expression en question deviendra

$$kt\mp\frac{n\pi}{2}+\lambda_n(a)-(2m+1)\lambda_n(a')\pm\lambda_n(a'),$$

et le coefficient de $\frac{\pi n}{2}$ sera $\mp 1+2m+1$ correspondant à $-\lambda_n(a')$, ou $\mp 1+2m-1$ correspondant à $+\lambda_n(a')$. Si $\beta_{n,m}$ ou $\gamma_{n,m}$ est développé en série suivant les puissances croissantes de $\left(\frac{n+\frac{1}{2}}{a}\right)$, les coefficients de $\left(\frac{n+\frac{1}{2}}{a}\right)^2$ deviendront

$$(\pm)\frac{2N(N-1)^m}{(N+1)^{m+1}}\left(\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{N^2}\right)-\frac{2m+1}{2N}\right),$$

$(\pm)$ correspondant à $\gamma_{n,m}$ pour m impair ou pair.

NOTE **30**. Si l'on suppose que $\nu+\frac{1}{2}$ désigne la distance d'un rayon incident à l'axe, on reconnaîtra que θ est l'angle l'incidence et θ' l'angle de réfraction, tandis que ϑ et ϑ' désignent les angles sous lesquels le rayon réfracté et réfléchi (une ou plusieurs fois) par la sphère coupe l'axe, ce qu'on voit facilement en remarquant que la distance du rayon au centre est toujours la même au dehors de la sphère, et qu'elle reste aussi constante à l'intérieur de la sphère.

Les développements suivants du mémoire prennent tous comme point de départ, qu'un terme de la série qui exprime le mouvement lumineux dont l'indice est ν, représente le rayon incident à la distance ν de l'axe, et

que la partie d'ûn terme d'indice n correspondante à $b_{n,m}$, etc., représente la partie du rayon réfléchie m fois.

NOTE 31. La valeur de l'amplitude est, d'après mes calculs, 21,326, elle de l'intensité 454,80.

NOTE 32. On reconnaît immédiatement que les dérivées par rapport à a des quantités qui n'entrent pas dans l'exposant seront d'un ordre de grandeur plus petit que celui des dérivées des quantités, qui entrent dans l'exposant. De même on voit, si l'on ne conserve que les termes d'ordre supérieur dans l'expression (79), qu'on peut négliger la partie de la dérivée par rapport à φ obtenue par différentiation de $\sqrt{\frac{2 q_n(a)}{\pi n \sin\varphi}}$.

NOTE 33. Comme on peut admettre que $\frac{\partial(F\alpha)}{\partial\theta} = 0$, on aura

$$\frac{d(F\alpha)}{da} = \frac{\partial(F\alpha)}{\partial\theta} \cdot \frac{d\theta}{da} + \frac{\partial(F\alpha)}{\partial a}.$$

Mais

$$F\alpha = kt - \frac{\nu\pi}{2} - \lambda_\nu(a) + \psi,$$

où ψ est composé de termes qui ne contiennent pas a, et par conséquent

$$\frac{dF\alpha}{da} = -\frac{d\lambda_\nu(a)}{da} = -\cos\vartheta.$$

NOTE 34. φ ne figure dans $F\alpha$ que par le terme $\pm(\nu + \frac{1}{2})\varphi$.

NOTE 35. Comme on sait par la théorie des fonctions Γ, on a

$$\Gamma(\mu) = \sqrt{\frac{2\pi}{\mu}} \left(\frac{\mu}{e}\right)^{\mu} (1+\delta),$$

où δ tend vers zéro, si μ croît infiniment. Par conséquent on a approximativement, si n est un grand nombre,

$$\frac{(2a)^{2n+1}}{1\cdot 3\cdot 5\ldots 4n+1}\;\frac{1\cdot 3\ldots 2n-1}{2\cdot 4\ldots 2n}=\frac{(2a)^{2n+1}[\Gamma(2n+1)]^2}{\Gamma(4n+2)[\Gamma(n+1)]^2}$$

$$=\frac{(2a)^{2n+1}\frac{2\pi}{2n+1}\left(\frac{2n+1}{e}\right)^{4n+2}}{\sqrt{\frac{2\pi}{4n+2}}\left(\frac{4n+2}{e}\right)^{4n+2}\cdot\frac{2\pi}{n+1}\left(\frac{n+1}{e}\right)^{2n+2}}$$

$$=\frac{e(ae)^{2n+1}}{\sqrt{\pi(2n+1)}\,[2(n+1)]^{2n+1}},$$

expression qui, comme on voit, devient infiniment grande en même temps que n, si $\frac{ae}{2n+2}>1$.

NOTE **36.** Si $n+\frac{1}{2}-a$ est du même ordre de grandeur que a, $1-\frac{a}{n+\frac{1}{2}}$ ne peut pas devenir nul ou très petit. Les deux limites de l'intégrale peuvent être regardées comme des quantités de la même nature que ω.

On voit en développant l'intégrale en série qu'elle peut être mise sous la forme d'une somme de termes tels que

$$A_m\int_{\omega_1}^{\omega_2} y^{m-\frac{1}{2}}\sin\left[\left(1\pm\frac{a}{n+\frac{1}{2}}\right)\cdot y-\frac{\pi}{4}\right],$$

où m est un nombre entier et A_m une constante. Mais, d'après la formule (39), cette somme doit s'évanouir. (Voir pourtant la note 14.)

NOTE **37.** On a

$$1^2\cdot 3^2\ldots(2n-1)^2(2n+1)=\frac{\Gamma(2n+2)\,\Gamma(2n)}{2^{2n-1}\,\Gamma(n)\,\Gamma(n+1)}.$$

Si l'on se sert de la formule citée dans la note 35, on obtiendra l'expression donnée dans le texte.

NOTE 38. On reconnaît par la formule (66) ou (67) que, dans le cas cité, $v_n^2 + w_n^2$ n'est pas d'un ordre supérieur que l'unité. Par conséquent $v_n w_n$ ne peut pas être d'un ordre plus grand que l'unité.

NOTE 39. On suppose ici que n, $n-m$ et $n+m$ sont des nombres très grands. Dans cette hypothèse on peut appliquer la formule citée dans la note 35, et l'on obtiendra

$$\frac{(n-m+1)(n-m+2)\dots(n+m)}{a^{2m}} \cdot \frac{1\cdot 3\dots(2m-1)}{2\cdot 4\dots 2m}$$

$$= \frac{\Gamma(n+m+1)\,\Gamma(2m+1)}{2^{2m}a^{2m}\Gamma(n-m+1)\,[\Gamma(m+1)]^2}$$

$$= \frac{e^{-2m+1}(n+m+1)^{n+\frac{1}{2}+m}(2m+1)^{2m+\frac{1}{2}}}{2^{2m+\frac{1}{2}}a^{2m}\sqrt{\pi}\,(n-m+1)^{n-m+\frac{1}{2}}(m+1)^{2m+1}}.$$

Mais, comme $n+m+1$ est très grand, on aura

$$(n+m+1)^{n+\frac{1}{2}+m} = (n+m+\tfrac{1}{2})^{n+\frac{1}{2}+m}\left(1+\frac{(\frac{1}{2})}{n+m+\frac{1}{2})}\right)^{n+\frac{1}{2}+m}$$
$$= (n+m+\tfrac{1}{2})^{n+m+\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{2}},$$

et de la même manière

$$(n-m+1)^{n-m+\frac{1}{2}} = (n-m+\tfrac{1}{2})^{n-m+\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{2}},$$
$$(2m+1)^{2m+\frac{1}{2}} = (2m)^{2m+\frac{1}{2}}e,$$
$$(m+1)^{2m+1} = m^{2m+1}e^2,$$

où l'on voit pourtant que toutes ces expressions ne sont qu'approximatives. En introduisant ces valeurs dans l'expression trouvée ci-dessus, on obtiendra l'expression du mémoire.

NOTE 40. Les termes $\frac{m^5}{(n+\frac{1}{2})^4}\cdot\frac{1}{4\cdot 5}$, etc., de la série qui représente $F(m)$ sont ici négligés. Cela sera

permis, si l'on peut supposer que l'ordre de grandeur de m soit inférieur à celui de n. Mais, comme on le voit, les termes de la série (66) deviennent très petits, si l'ordre de grandeur de la quantité m s'approche de celui de n.

NOTE **41**. Mes calculs donnent 0,5172.

NOTE **42**. Pour vérifier les formules (105) et (106), il est nécessaire de former le produit et la somme des carrés des séries qui figurent dans leurs seconds membres. On voit immédiatement que les résultats de ces opérations seront des séries procédant suivant les puissances croissantes de ε. Si nous formons $v_n(a)w_n(a)$, le coefficient de ε^{3q} sera

$$\frac{3\sqrt{3}}{4}C^2\left[\frac{\Gamma(\frac{1}{3})\Gamma(q+\frac{1}{3})}{1!\,3q!}+\frac{\Gamma(\frac{4}{3})\,\Gamma(q-1+\frac{1}{3})}{3!\,3(q-1)!}+\dots\right].$$

Nous appellerons K_{3q} la série entre crochets et nous chercherons à sommer cette série.

On a, comme on sait,

$$\frac{\Gamma(n)\,\Gamma(m)}{\Gamma(n+m)}=\int_0^\infty\frac{\xi^{n-1}\,d\xi}{(\xi+1)^{n+m}}$$

(le second membre étant la fonction eulérienne désignée par B), et par conséquent

$$K_{3q}=\frac{\Gamma(q+\frac{2}{3})}{3q!}\int_0^\infty\frac{\left(\xi^{q-1+\frac{1}{3}}+\xi^{q-2+\frac{1}{3}}\dfrac{3q!}{3q-3!\,3!}+\xi^{q-3+\frac{1}{3}}\dfrac{3q!}{3q-6!\,6!}+\dots\right)}{(\xi+1)^{q+\frac{2}{3}}}.$$

Si α et $\overline{\alpha}$ désignent les deux racines cubiques imaginaires de l'unité, l'expression ci-dessus peut s'écrire

$$K_{3q}=\frac{1}{3}\,\frac{\Gamma(q+\frac{2}{3})}{3q!}\int_0^\infty\frac{\xi^{-\frac{2}{3}}[(\xi^{\frac{1}{3}}+1)^{3q}+(\alpha\xi^{\frac{1}{3}}+1)^{3q}+(\overline{\alpha}\xi^{\frac{1}{3}}+1)^{3q}]\,d\xi}{(\xi+1)^{q+\frac{2}{3}}},$$

expression qui peut être transformée en

$$K_{3q} = \frac{\Gamma(q+\frac{2}{3})}{3q!}\int_0^\infty \frac{[(x+1)^{3q} + (\alpha x+1)^{3q} + (\bar{\alpha} x+1)^{3q}]\,dx}{(x^3+1)^{q+\frac{2}{3}}},$$

ou, sous une forme plus condensée,

$$(1) \qquad K_{3q} = \frac{\Gamma(q+\frac{2}{3})}{3q!}\int_0^\infty \frac{\Sigma(\alpha x+1)^{3q}\,dx}{(x^3+1)^{q+\frac{2}{3}}}.$$

En intégrant par parties, on en déduit

$$(2) \quad K_{3q} = \frac{\Gamma(q+\frac{2}{3})}{3q!}\,\frac{3q+2}{3q+1}\int_0^\infty \frac{\Sigma\bar{\alpha}x^2(\alpha x+1)^{3q+1}\,dx}{(x^3+1)^{q+1+\frac{2}{3}}},$$

et, en remplaçant x par $\frac{1}{x}$,

$$(3) \qquad K_{3q} = \frac{\Gamma(q+\frac{2}{3})}{3q!}\,\frac{3q+2}{3q+1}\int_0^\infty \frac{\Sigma(\alpha x+1)^{3q+1}}{(x^3+1)^{q+1+\frac{2}{3}}}\,dx.$$

En additionnant ces deux expressions, on obtient

$$(4) \quad 2K_{3q} = \frac{\Gamma(q+\frac{2}{3})}{3q!}\,\frac{3q+2}{3q+1}\int_0^\infty \frac{\Sigma(\alpha x+1)^{3q+1}(\bar{\alpha}x^2+1)}{(x^3+1)^{q+1+\frac{2}{3}}}\,dx$$

$$= 3(3q+2)(3q+3)K_{3q+1} - \frac{2\Gamma(q+\frac{2}{3})}{3q!}\,\frac{3q+2}{3q+1}\int_0^\infty \frac{\Sigma\alpha x(\alpha x+1)^{3q+1}\,dx}{(x^3+1)^{q+1+\frac{2}{3}}},$$

ou bien

$$(5) \qquad 3K_{3(q+1)}\cdot(3q+2)(3q+3) = \frac{2\Gamma(q+\frac{2}{3})}{3q!}\cdot\frac{3q+2}{3q+1}\cdot\int_0^\infty \frac{\Sigma\alpha x(\alpha x+1)^{3q+2}\,dx}{(x^3+1)^{q+1+\frac{2}{3}}},$$

ce qu'on voit en remplaçant dans le premier membre de l'équation (4) K_{3q} par l'expression (2). On aura par conséquent

$$(6)\qquad K_{3(q+1)} = \frac{2\Gamma(q+1+\frac{2}{3})}{3(q+1)!}\int_0^\infty \frac{\Sigma\, ax\,(ax+1)^{3q+2}\,dx}{(x^3+1)^{q+1+\frac{2}{3}}}$$

$$= \frac{2\Gamma(q+1+\frac{2}{3})}{3(q+1)!}\int_0^\infty \frac{\Sigma\,(ax+1)^{3q+2}\,dx}{(x^3+1)^{q+1+\frac{2}{3}}},$$

où la dernière expression s'obtient en remplaçant x par $\frac{1}{x}$. Par conséquent on aura

$$(7)\qquad K_{3q} = \frac{2\Gamma(q+\frac{2}{3})}{3q!}\int_0^\infty \frac{\Sigma\,(ax+1)^{3q-1}\,dx}{(x^3+1)^{q+\frac{2}{3}}},$$

et, après intégration par parties,

$$(8)\qquad K_{3q} = \frac{2\Gamma(q+\frac{2}{3})}{3q!}\cdot\frac{3q+2}{3q}\int_0^\infty \frac{\Sigma\,\bar{a}x^2(ax+1)^{3q}\,dx}{(x^3+1)^{q+\frac{2}{3}+1}}$$

$$= \frac{2\Gamma(q+\frac{2}{3})}{3q!}\cdot\frac{3q+2}{3q}\int_0^\infty \frac{\Sigma\, ax\,(ax+1)^{3q}}{(x^3+1)^{q+1+\frac{2}{3}}}\,dx;$$

par où l'on obtient, en ajoutant la première expression au double de la seconde,

$$(9)\quad K_{3q} = \frac{2\,\Gamma(q+1+\frac{2}{3})}{3q!\,3q}\int_0^\infty \frac{\Sigma(ax+1)^{3q+2}-\Sigma(ax+1)^{3q}}{(x^3+1)^{q+1+\frac{2}{3}}}\,dx$$

$$= \frac{2\,\Gamma(q+1+\frac{2}{3})}{3q!\,3q}\int_0^\infty \frac{\Sigma\, ax(ax+1)^{3q+2}-\Sigma x^3(ax+1)^{3q}}{(x^3+1)^{q+1+\frac{2}{3}}}\,dx,$$

et, en additionnant de nouveau ces deux expressions,

$$(10)\quad 2\,K_{3q} = \frac{2K_{3(q+1)}}{3q}(3q+1)(3q+2)(3q+3) - \frac{2(q+\frac{2}{3})}{3q}K_{3q}$$

$$(11)\qquad K_{3(q+1)} = \frac{(4q+\frac{2}{3})K_{3q}}{(3q+1)(3q+2)(3q+3)}.$$

Mais on a

$$\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)^2 = 2^{\frac{1}{3}}\sqrt{\frac{\pi}{3}}\,\Gamma\left(\frac{1}{6}\right),$$

et on reconnaît alors facilement que

$$K_{3q} = \frac{4^q(q-1+\frac{1}{6})(q-2+\frac{1}{6})\ldots\frac{1}{6}\,\Gamma(\frac{1}{3})^2}{3q!}$$

$$= \frac{4^q 2^{\frac{1}{3}}\sqrt{\frac{\pi}{3}}\,\Gamma\left(q+\frac{1}{6}\right)}{3q!}.$$

D'une manière analogue on peut sommer les autres séries, qui représentent dans $v_n w_n$ et dans $v_n^2 + w_n^2$ les coefficients des puissances de ε.

NOTE 43. On fait ici l'hypothèse que

$$\alpha > n + \tfrac{1}{2} > \alpha'.$$

NOTE 44. Les termes de la série qui représente $\lambda_n(\alpha)$ seront de la forme

$$\frac{A_m z^m}{\alpha^{m-1}},$$

tandisque les termes des séries qui réprésentent δ ou Δ seront de la forme

$$\frac{B_m z^m}{\alpha^m}$$

où A_m et B_m sont indépendants de α.

NOTE 45. Dans ce qui suit on présuppose que l'équation (68) est valable pour la variable α.

NOTE 46. $q_n(\alpha)$ croît toujours en même temps que n, ce qu'on reconnaît par l'équation (66). Si $\alpha-(n+\frac{1}{2})$ est positif et d'un ordre de grandeur supérieur à celui de $\alpha^{\frac{1}{3}}$, q_u

peut être exprimé par

$$\frac{a}{\sqrt{a^2-(n+\frac{1}{2})^2}}.$$

Par conséquent $q_n(a)$ sera d'un ordre plus grand que l'unité, si $a-n<a^{\frac{p}{q}}$, où $\frac{p}{q}$ est une fraction proprement dite.

NOTE **47**. En vertu de l'équation (63), λ_n est nul pour $a=0$, et en vertu de l'équation (64)

$$\lambda_n=\int_0^a\frac{da}{q_n}.$$

Mais comme q_n croît rapidement avec n, si $n>a$, on voit que λ_n décroît très vite avec la même quantité.

NOTE **48**. Voir le développement qui suit dans le texte.

NOTE **49**. On obtient cette expression en remplaçant la sommation de la série par une intégration.

NOTE **50**. Je ne puis reconnaître la légimité du raisonnement de Lorenz. Mais l'ordre de grandeur de r étant celui de $a^{\frac{1}{3}}$, l'ordre de r' sera celui de $a^{-\frac{2}{3}}$, et dans l'expression

$$\mu_{\nu+z}(a)=\mu_\nu(a)+\frac{z}{2r}-\frac{r'}{2r^2}\frac{z^2}{1\cdot 2}\cdots$$

le second terme sera du même ordre que $a^{-\frac{1}{3}}$, et, comme on le reconnaît facilement, le résultat de Lorenz subsiste néanmoins.

NOTE **51**. Les expressions citées sont les coefficients de $\bar{k}_n\bar{k}_m$, $\bar{s}_n\bar{s}_m$ ou de $\bar{k}_n\bar{s}_m$. On voit immédiatement que

$$\int_0^\pi d\varphi\left(\frac{d^2P_n}{d\varphi^2}\frac{dP_m}{d\varphi}+\frac{dP_n}{d\varphi}\frac{d^2P_m}{d\varphi^2}\right)=\left|\frac{dP_n}{d\varphi}\frac{dP_m}{d\varphi}\right|_0^\pi=0.$$

Comme on sait, la fonction $P_n(\cos\varphi)$ satisfait à l'équation

$$\frac{d^2P_n}{d\varphi^2}+\cot\varphi\frac{dP_n}{d\varphi}+n(n+1)P_n=0.$$

Par conséquent on aura

$$\int_0^\pi \sin\varphi\left(\frac{d^2P_n}{d\varphi^2}\frac{d^2P_m}{d\varphi^2}+\frac{1}{\sin^2\varphi}\frac{dP_n}{d\varphi}\frac{dP_m}{d\varphi}\right)d\varphi$$

$$=\int_0^\pi \sin\varphi\left[\left(\cot\varphi\frac{dP_n}{d\varphi}+n(n+1)P_n\right)\left(\cot\varphi\frac{dP_m}{d\varphi}+m(m+1)P_m\right)+\frac{1}{\sin^2\varphi}\frac{dP_m}{d\varphi}\frac{dP_n}{d\varphi}\right]d\varphi.$$

Si l'on pose $\cos\varphi=x$, cette expression peut s'écrire

$$\int_{-1}^{+1}\left[\left(x\frac{dP_n}{dx}-n(n+1)P_n\right)\left(x\frac{dP_m}{dx}-m(m+1)P_m\right)+\frac{dP_n}{dx}\frac{dP_m}{dx}\right]dx$$

$$=\int_{-1}^{+1}\left[(x^2-1)\frac{dP_n}{dx}\frac{dP_m}{dx}-n(n+1)xP_n\frac{dP_m}{dx}-m(m+1)xP_m\frac{dP_n}{dx}+n(n+1)m(m+1)P_nP_m+2\frac{dP_n}{dx}\frac{dP_m}{dx}\right]dx.$$

Si l'on pose $n>m$, tous les termes de cette expression s'évanouiront, à l'exception de

$$\int_{-1}^{+1}\left(-m(m+1)xP_m\frac{dP_n}{dx}+2\frac{dP_n}{dx}\frac{dP_m}{dx}\right)dx,$$

à cause de la relation bien connue $\int_{-1}^{+1}f_mP_n\,dx=0$, si f_m est un polynôme entier, de degré inférieur à celui de P_n. Mais cette expression est égale à

$$\left| - m(m+1) x P_m P_n + 2 P_n \frac{dP_m}{dx} \right|_{-1}^{+1}.$$

Mais

$$- m(m+1) x P_m + 2 \frac{dP_m}{dx}$$

s'évanouit tant pour $x = +1$ que pour $x = -1$, en vertu de la relation

$$(1-x^2) \frac{d^2 P_m}{dx^2} - 2x \frac{dP_m}{dx} + m(m+1) P_m = 0 .$$

Si $n = m$, en se servant de la relation

$$x \frac{dP_n}{dx} - \frac{dP_{n-1}}{dx} = n P_n,$$

on aura

$$\int_{-1}^{+1} \left[\left(x \frac{dP_n}{dx} - n(n+1) P_n \right)^2 + \left(\frac{dP_n}{dx} \right)^2 \right] dx$$

$$= \int_{-1}^{+1} \left[\left(\frac{dP_{n-1}}{dx} - n^2 P_n \right)^2 + \left(\frac{dP_n}{dx} \right)^2 \right] dx$$

$$= \int_{-1}^{+1} \left[\left(\frac{dP_{n-1}}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dP_n}{dx} \right)^2 + n^4 P_n^2 \right] dx$$

$$= \left| P_{n-1} \frac{dP_{n-1}}{dx} \right|_{-1}^{+1} + \left| P_n \frac{dP_n}{dx} \right|_{-1}^{+1} + \frac{2n^4}{2n+1}$$

$$= n(n+1) + n(n-1) + \frac{2n^4}{2n+1} = \frac{2n^2(n+1)^2}{2n+1}.$$

NOTE 52. Cela implique la supposition que N est très grand, supposition qui est faite à la fin du mémoire „Théorie de la dispersion".

NOTE 53. On suppose ici que la lumière transformée (émise) par le système de sphères est absorbée par

ce système, hypothèse dont l'admissibilité est très douteuse. Mais, quand bien même cette hypothèse serait admissible, on ne peut pas admettre que chaque sphère d'un système composé de plusieurs couches absorbe la même quantité de lumière.

NOTE 54. α' est ici très grand en comparaison de α et par suite N est très grand.

NOTE 55. Les expressions de p_n et q_n ne sont pas tout à fait exactes. On a

$$p_n = \frac{1^2 \cdot 3^2 \ldots (2n-1)^2 (2n+1)}{\alpha^{2n+1}} \frac{\alpha' v_n'(\alpha') + N^2 n v_n(\alpha')}{\alpha' v_n'(\alpha') - N^2 (n+1) v_n(\alpha')},$$

et si λ est une racine de l'équation $p_n = 0$, la valeur de p_n pour $\lambda + \delta$, δ étant très petit, sera

$$p_n = -\left[\frac{dp_n}{d\alpha'}\right] \frac{\alpha' \delta}{\lambda}.$$

Lorenz suppose que N est constant, quoiqu'on ne puisse savoir s'il en est ainsi en réalité, et qu'on doive plus correctement supposer que N est une fonction de λ. Dans l'hypothèse de Lorenz, on a

$$p_n = -\left[\frac{\alpha' v_n'(\alpha') + \alpha'^2 v_n''(\alpha') + \alpha' N^2 n v_n'(\alpha')}{\alpha' v_n'(\alpha') - N^2 (n+1) v_n(\alpha')}\right] \frac{1^2 \cdot 3^2 \ldots (2n-1)^2 (2n+1)}{\alpha^{2n+1}} \cdot \ldots$$

Mais en vertu des équations

$$\alpha' v_n'(\alpha') + N^2 n v_n(\alpha') = 0$$

et

$$v_n''(\alpha') = \left(\frac{n(n+1)}{\alpha'^2} - 1\right) v_n(\alpha'),$$

les quantités $v_n'(\alpha')$ et $v_n''(\alpha')$ peuvent être éliminées de p_n, et on obtiendra

$$p_n = \left[-n + \frac{n(n+1)}{N^2} - \frac{\alpha'^2}{N^2} - n^2 N^2\right] \frac{1^2.3^2\ldots(2n-1)^2}{\alpha^{2n+1}} \frac{\delta}{\lambda},$$

mais comme $\frac{\alpha'^2}{N^2} = \alpha^2$, on peut négliger ce terme et le résultat sera

$$p_n = -\frac{N^2-1}{N^2}\left[n(n+1)+n^2N^2\right] \frac{1^2.3^2\ldots(2n-1)^2}{\alpha^{2n+1}} \frac{\delta}{\lambda}.$$

La formule (112) peut être employée à calculer la valeur de q_n. On aura

$$q_n = -\frac{\delta\alpha}{\lambda}\left[\frac{-w_n''(\alpha)\,v_n(\alpha') + N^2 w_n(\alpha)\,v_n''(\alpha')}{N v_n(\alpha) v_n'(\alpha') - v_n'(\alpha)\,v_n(\alpha')}\right]$$

$$= -\frac{\delta\alpha}{\lambda}\left[\frac{v_n(\alpha')\,w_n(\alpha)\,(1-N^2)}{N v_n(\alpha)\,v_n'(\alpha') - v_n'(\alpha)\,v_n(\alpha')}\right].$$

Mais comme α' est racine de l'équation

$$\alpha N v_n'(\alpha') + n\,v_n(\alpha') = 0,$$

on obtiendra facilement, en négligeant les puissances supérieures de α,

$$q_n = \frac{1^2.3^2\ldots(2n-1)^2}{\alpha^{2n-1}}(1-N^2)\frac{\delta}{\lambda}.$$